



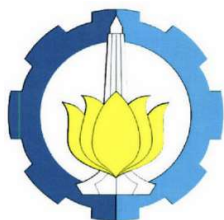
**DISERTASI – SS14 3506**

**ESTIMATOR *SPLINE* DALAM REGRESI  
NONPARAMETRIK BIRESPON UNTUK  
DATA LONGITUDINAL  
(STUDI KASUS PADA PASIEN PENDERITA  
TB PARU DI MALANG)**

**ADJI ACHMAD RINALDO FERNANDES  
NRP. 1311301001**

**PROMOTOR/CO-PROMOTOR  
Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.  
Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si.  
Dr. Suhartono, S.Si., M.Sc.**

**PROGRAM DOKTOR  
JURUSAN STATISTIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2016**



---

**DISSERTATION– SS14 3506**

**SPLINE ESTIMATOR IN BIRESPO  
NONPARAMETRIC REGRESSION FOR  
LONGITUDINAL DATA  
(CASE STUDY PATIENT WITH PULMONARY  
TUBERCULOSIS IN MALANG)**

**ADJI ACHMAD RINALDO FERNANDES  
NRP. 1311301001**

**PROMOTOR/CO-PROMOTOR  
Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.  
Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si.  
Dr. Suhartono, S.Si., M.Sc.**

**DOCTORAL PROGRAM  
STATISTICS DEPARTMENT  
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2016**

Lembar Pengesahan Disertasi

Disertasi disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Doktor

Di

Program Doktor Jurusan Statistika  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Disusun Oleh:

Adji Achmad Rinaldo Fernandes  
NRP. 1311301001

Tanggal Ujian : 16 Februari 2016  
Periode Wisuda : Maret 2016

Disetujui Oleh:

Dr. Danardono, MPH.  
NIP. 19680919 199412 1 001

.....  
Penguji (Eksternal)

Dr. Ir. Setiawan, M.S.  
NIP. 19601030 198701 1 001

.....  
Penguji

Dr. Purhadi, M.Sc.  
NIP. 19620204 198701 1 001

.....  
Penguji

Dr. Vita Ratnasari, M.Si.  
NIP. 19700910 199702 2 001

.....  
Penguji

Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.  
NIP. 19650603 198903 1 003

.....  
Promotor

Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si.  
NIP. 19681124 199412 1 001

.....  
Co-Promotor

Dr. Suhartono, S.Si., M.Sc.  
NIP. 19710929 199512 1 001

.....  
Co-Promotor

Direktur Pascasarjana,

Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.  
NIP. 19601202 198701 1 001



## ABSTRAK

Penelitian mengenai model regresi nonparametrik yang berkembang saat ini terfokus pada pendekatan model respon tunggal untuk data longitudinal, ataupun pendekatan model multi respon untuk data *cross section*. Pada penelitian ini dikembangkan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal, yang mengakomodir adanya korelasi antara pengamatan dalam subyek yang sama, serta adanya korelasi antar tiap respon. Kajian awal difokuskan pada pengembangan bentuk estimator *spline* dan parameter penghalus yang optimal untuk mengestimasi kurva regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal. Selanjutnya, hasil kajian teoritik diterapkan pada data penyakit Tuberkulosis Paru di Ruang Rawat Jalan Poli Paru dan Ruang Rawat Inap RSSA Malang Tahun 2011, serta data simulasi. Model regresi nonparametrik birespon yang melibatkan  $p$  prediktor pada data longitudinal memiliki bentuk estimator sebagai berikut:

$$\tilde{f}(x) = \mathbf{T}^* \hat{d}^* + \mathbf{V}^* \hat{e}^*.$$

Adapun estimator *spline* yang memenuhi kriteria meminimumkan *Penalized Weighted Least Square* (PWLS):

$$\min_{f_{(k)} \in W_2^m[a_{(k)}, b_{(k)}], k=1,2, \dots, p; i=1,2, \dots, N} \left\{ M^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}) + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \left[ \sum_{\ell=1}^p \int_{a_{(k)}}^{b_{(k)}} \left[ f_{(ki)}^{(m)}(x_{\ell i}) \right]^2 dx_{\ell i} \right] \right\}$$

adalah  $\hat{f}_{\lambda} = \mathbf{T}^* \hat{d}_{\lambda}^* + \mathbf{V}^* \hat{e}_{\lambda}^* = \mathbf{A}_{\lambda}^* \mathbf{y}$ , dengan

$$\mathbf{A}_{\lambda}^* = \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} + \mathbf{V}^* \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}].$$

Parameter penghalus optimal  $\lambda_{opt} = (\lambda_{1(opt)}, \lambda_{12(opt)}, \dots, \lambda_{2N(opt)})'$  untuk estimator *spline* regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal diperoleh dari meminimumkan fungsi GCV. Terapan pada data simulasi menunjukkan bahwa: 1) Karakteristik fungsi percobaan eksponensial dan trigonometri memberikan hasil simulasi lebih baik dibandingkan fungsi percobaan polinomial. 2) penggunaan estimator *spline* birespon memberikan hasil yang kurang efektif pada tingkat korelasi  $|\rho|$  antara 0,1-0,3. Penggunaan matriks varians-kovarians *random error* mempertimbangkan korelasi antar respon tepat untuk digunakan pada kondisi tingkat korelasi  $|\rho| > 0,3$ . Semakin tinggi tingkat korelasi, semakin tinggi pula nilai  $R^2$  yang dihasilkan. Terapan pada data riil menunjukkan bahwa hasil estimator *spline* nonparametrik birespon untuk data longitudinal pada data aplikasi pasien penderita TB Paru memiliki tingkat prediksi yang baik (82,8%).

**Kata Kunci:** Estimator *Spline*, Birespon, Longitudinal, PWLS



## ABSTRACT

Studies on nonparametric regression model that developed at this time focus on single response model approach for longitudinal data, or multi-responses model approach for cross section data. This study will be developed spline estimators in biresponses nonparametric regression for longitudinal data which accommodates correlation between observations of the same subject, and correlation between each responses. Initial study focused on the spline estimators form development and optimum smoothing parameters to estimate biresponses nonparametric regression curve in longitudinal data. In the final section, the result of theoretical study was applied on application data of Pulmonary Tuberculosis in Outpatient Ward of Pulmonary Polyclinic and Inpatient of RSSA Malang in 2011 and simulation data. Biresponses nonparametric regression model which involved  $p$  predictors in longitudinal data, the estimators was expressed as follows:

$$\hat{f}(x) = \mathbf{T}^* \hat{d}^* + \mathbf{V}^* \hat{c}^*.$$

While spline estimators which met the criteria of minimizing Penalized Weighted Least Square (PWLS):

$$\min_{f_{kl} \in W_2^m[a_{kl}, b_{kl}], k=1,2; \ell=1,2,\dots,p; j=1,2,\dots,N} \left\{ M^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{f})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{f}) + \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^p \lambda_{k\ell} \left[ \sum_{j=1}^N \int_{a_{kl}}^{b_{kl}} [f_{k\ell}^{(m)}(x_{t\ell j})]^2 dx_{t\ell j} \right] \right\}$$

were  $\hat{f}_{\hat{\lambda}} = \mathbf{T}^* \hat{d}^* + \mathbf{V}^* \hat{c}^* = \mathbf{A}_{\hat{\lambda}}^* \mathbf{y}$ , with

$$\mathbf{A}_{\hat{\lambda}}^* = \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} + \mathbf{V}^* \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}].$$

Optimum smoothing parameters  $\hat{\lambda}_{opt} = (\lambda_{11(opt)}, \lambda_{12(opt)}, \dots, \lambda_{2N(opt)})'$  for biresponses nonparametric regression spline estimators in longitudinal data was obtained by minimizing function of GCV. Application on simulation data showed that: 1) Characteristics of exponential and trigonometric function of experiment yielded the highest level of accuracy, 2) the application of spline estimator of biresponses give the less effective in correlation level  $|\rho|$  between 0.1-0.3. The use of variance-covariances matrix of random error which accomodate the correlation between each responses usefullness in condition of correlation level  $|\rho| > 0.3$ . The higher level of correlation, the higher the  $R^2$  level obtained. The application on real data showed that the result of biresponses nonparametric spline estimators for longitudinal data on patients application data with Pulmonary TB had adequate level of prediction (82.8%).

**Keywords:** Spline Estimator, Biresponses, Longitudinal, PWLS

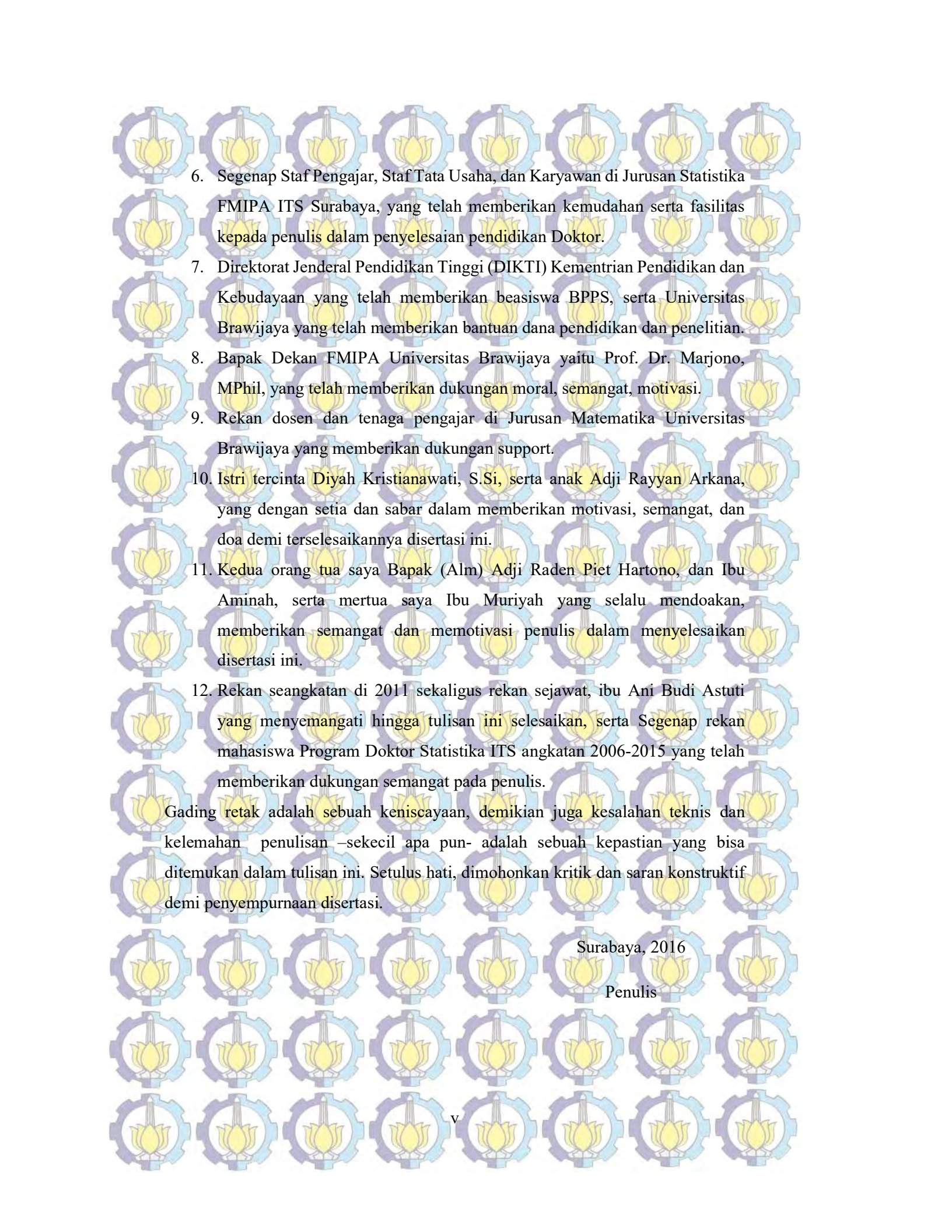


## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, atas berkat Allah SWT yang telah memberikan kesehatan, perlindungan, bimbingan, ilmu, utamanya rahmat dan hidayah-Nya, akhirnya terselesaikan penyusunan disertasi dengan judul **Estimator *Spline* dalam Regresi Nonparametrik Birespon untuk Data Longitudinal**. Diharapkan tulisan ini bisa menjadi salah satu acuan atau referensi bagi peneliti berikutnya maupun para praktisi yang tertarik pada kajian analisis regresi nonparametrik, khususnya Estimator *Spline* yang melibatkan respon ganda serta penggunaannya pada data longitudinal. Penyelesaian tulisan ini tidak terlepas dari bantuan dari berbagai pihak, oleh karena itu penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya dengan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada :

1. Bapak Rektor Universitas Brawijaya Prof. Dr. Ir. Muhammad Bisri, M.T., yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk melanjutkan studi ke jenjang pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya.
2. Bapak Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si. sebagai promotor, Bapak Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si, serta Bapak Dr. Suhartono, S.Si, M.Sc. (yang juga selaku Ketua Jurusan Statistika dan Ketua Program Pascasarjana Statistika ITS Surabaya) sebagai kopromotor, yang telah membimbing dan mengarahkan dengan sabar dan tulus dalam penyusunan dan penyelesaian disertasi ini.
3. Bapak Dr. Ir. Setiawan, M.S., Bapak Dr. Purhadi, M.Sc., serta Ibu Dr. Vita Ratnasari, M.Si., sebagai tim penilai yang telah banyak memberikan saran dan masukan dalam perbaikan disertasi ini.
4. Bapak Dr. Danardono, M.PH., sebagai penguji eksternal dari Universitas Gadjah Mada (UGM) Yogyakarta yang meluangkan waktu untuk membantu memberikan saran dan pendapat guna penyempurnaan disertasi ini.
5. Bapak Dr. Agus Suharsono, M.S., dan ibu Dr. Kartika Fitriyanti, M.Si. sebagai tim validasi yang telah banyak memberikan masukan serta perbaikan guna kesempurnaan disertasi ini.



- 
6. Segenap Staf Pengajar, Staf Tata Usaha, dan Karyawan di Jurusan Statistika FMIPA ITS Surabaya, yang telah memberikan kemudahan serta fasilitas kepada penulis dalam penyelesaian pendidikan Doktor.
  7. Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi (DIKTI) Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan yang telah memberikan beasiswa BPPS, serta Universitas Brawijaya yang telah memberikan bantuan dana pendidikan dan penelitian.
  8. Bapak Dekan FMIPA Universitas Brawijaya yaitu Prof. Dr. Marjono, MPhil, yang telah memberikan dukungan moral, semangat, motivasi.
  9. Rekan dosen dan tenaga pengajar di Jurusan Matematika Universitas Brawijaya yang memberikan dukungan support.
  10. Istri tercinta Diah Kristianawati, S.Si, serta anak Adji Rayyan Arkana, yang dengan setia dan sabar dalam memberikan motivasi, semangat, dan doa demi terselesaikannya disertasi ini.
  11. Kedua orang tua saya Bapak (Alm) Adji Raden Piet Hartono, dan Ibu Aminah, serta mertua saya Ibu Muriyah yang selalu mendoakan, memberikan semangat dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan disertasi ini.
  12. Rekan seangkatan di 2011 sekaligus rekan sejawat, ibu Ani Budi Astuti yang menyemangati hingga tulisan ini selesai, serta Segenap rekan mahasiswa Program Doktor Statistika ITS angkatan 2006-2015 yang telah memberikan dukungan semangat pada penulis.

Gading retak adalah sebuah keniscayaan, demikian juga kesalahan teknis dan kelemahan penulisan –sekecil apa pun- adalah sebuah kepastian yang bisa ditemukan dalam tulisan ini. Setulus hati, dimohonkan kritik dan saran konstruktif demi penyempurnaan disertasi.

Surabaya, 2016

Penulis



## DAFTAR ISI

Halaman Judul.....	i
Lembar Pengesahan.....	ii
Abstrak .....	iii
Abstract.....	iv
Kata Pengantar.....	v
Daftar Isi .....	vii
Daftar Gambar.....	ix
Daftar Tabel.....	x
Daftar Lampiran .....	xi
Daftar Lambang dan Arti .....	xiii
Bab 1. Pendahuluan .....	1
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Perumusan Masalah .....	7
1.3. Tujuan Penelitian .....	8
1.4. Orisinalitas dan Kontribusi Penelitian .....	8
1.5. Batasan Masalah .....	9
Bab 2. Kajian Pustaka dan Dasar Teori .....	11
2.1. Data Longitudinal .....	11
2.2. <i>Reproducing Kernel Hilbert Space</i> .....	11
2.3. <i>Spline</i> dalam Regresi Nonparametrik.....	14
2.3.1 <i>Spline</i> dalam Regresi Nonparametrik untuk Data Cross-Section.....	15
2.3.2 <i>Spline</i> dalam Regresi Nonparametrik untuk Data Longitudinal .....	17
2.3.3 <i>Spline</i> dalam Regresi Nonparametrik Birespon untuk Data Cross-Section .....	20
2.3.4 <i>Spline</i> dalam Regresi Nonparametrik Birespon untuk Data Longitudinal.....	22
2.3.5 Penyelesaian Optimalisasi <i>Penalized Weighted Least Square</i> (PWLS) .....	24
2.3.6 Parameter Penghalus dalam Regresi Nonparametrik .	25
2.3.7. Ukuran Kesesuaian Model.....	25
2.3.8. Uji Korelasi dan Autokorelasi.....	26
2.3.9. Uji Linieritas .....	28



2.4. Penyakit TB Paru .....	29
2.4.1 Perkembangan Penyakit TB Paru.....	29
2.4.2 Diagnosis TB Paru.....	33
2.4.3 Pengobatan TB Paru .....	34
Bab 3. Metodologi Penelitian .....	37
3.1. Data Penelitian.....	37
3.2. Metode Penelitian .....	39
3.2.1. Estimasi Kurva Regresi Nonparametrik Birespon untuk Data Longitudinal .....	39
3.2.2. Aplikasi Model Regresi Nonparametrik Birespon pada Data Simulasi .....	41
3.2.3. Aplikasi Model Regresi Nonparametrik Birespon pada Data Penderita TB Paru.....	42
Bab 4. Hasil Kajian Teoritik.....	49
4.1. Estimator <i>Spline</i> untuk Mengestimasi Kurva Regresi Nonparametrik Birespon pada Data Longitudinal .....	49
4.2. Estimasi Matriks Varian-Kovarians <i>Random Error</i> .....	79
4.3. Metode Pemilihan Parameter Penghalus.....	82
Bab 5. Hasil Kajian Terapan.....	85
5.1. Penerapan Estimator <i>Spline</i> pada Data Simulasi .....	85
5.1.1. Simulasi pada Berbagai Tingkat Ordo Polinomial.....	85
5.1.2. Simulasi pada Berbagai Tingkat Korelasi.....	105
5.2. Penerapan Estimator <i>Spline</i> pada Data Penderita TB Paru .....	109
5.2.1. Deskripsi Data Penderita TB Paru.....	109
5.2.2. Uji Korelasi dan Uji Linieritas .....	111
5.2.3. Hasil Pengujian Estimator <i>Spline</i> Birespon .....	113
5.2.4. Validasi Model Data Penderita TB Paru.....	115
5.2.5. Interpretasi Model.....	117
Bab 6. Kesimpulan, Saran dan Keberlanjutan .....	125
6.1. Kesimpulan.....	125
6.2. Saran.....	128
6.3. Keberlanjutan.....	129
Daftar Pustaka .....	131
Lampiran .....	137



## DAFTAR GAMBAR

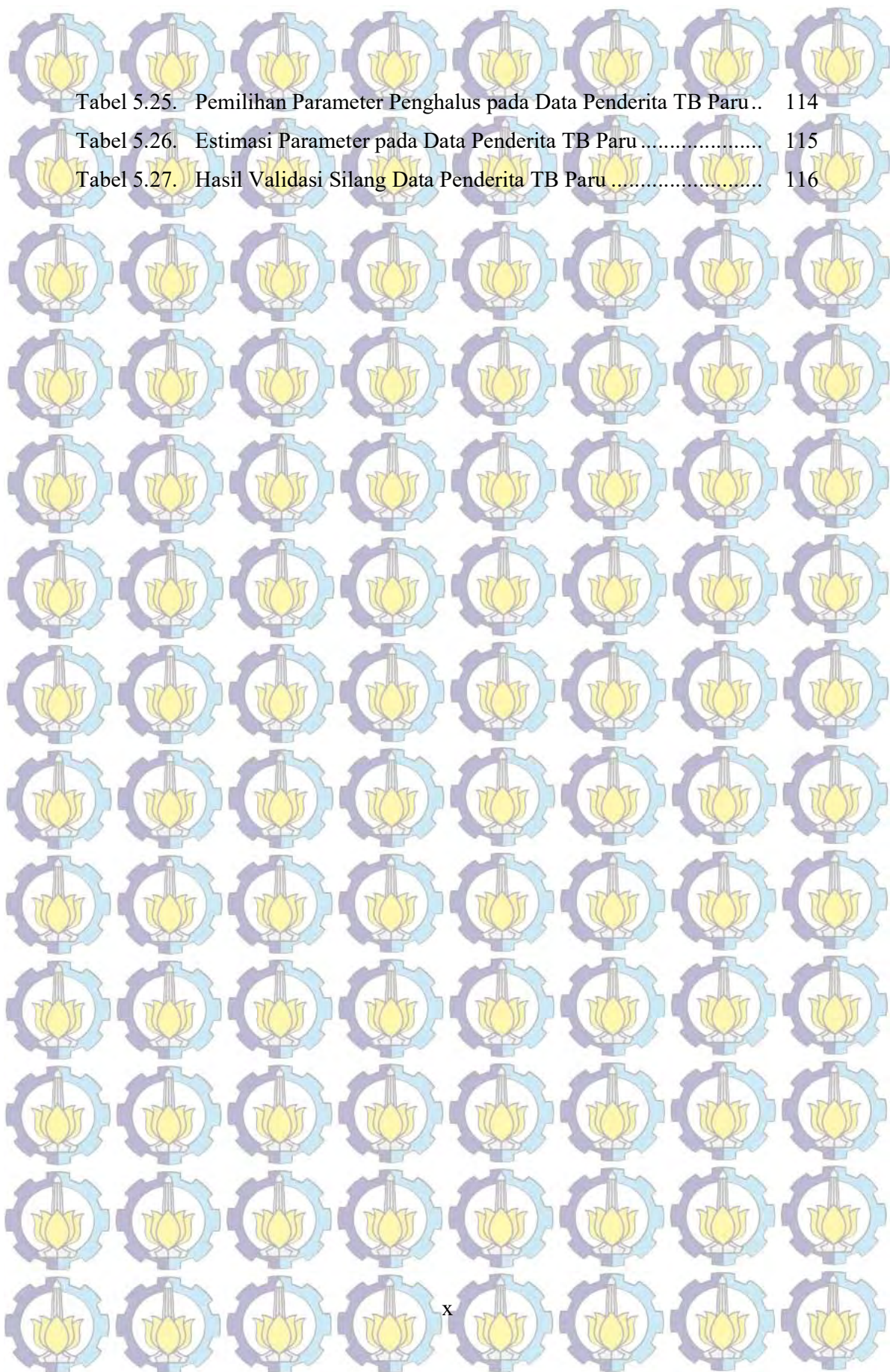
Gambar 1.1.	Posisi Penelitian Sebelumnya dan Sekarang .....	5
Gambar 2.1.	Disribusi Penyakit TB Paru Seluruh Dunia.....	32
Gambar 3.1.	Visualisasi Fungsi Distribusi .....	44
Gambar 4.1.	Perbandingan Parameter Penghalus Optimal & Tidak Optimal .....	83
Gambar 5.1.	Plot Data Hasil Simulasi Fungsi Percobaan EE .....	86
Gambar 5.2.	Plot Data Aktual dan Prediksi Simulasi EE .....	88
Gambar 5.3.	Plot Data Hasil Simulasi Fungsi Percobaan TT .....	89
Gambar 5.4.	Plot Data Aktual dan Prediksi Simulasi TT .....	91
Gambar 5.5.	Plot Data Hasil Simulasi Fungsi Percobaan PP .....	92
Gambar 5.6.	Plot Data Aktual dan Prediksi Simulasi PP .....	94
Gambar 5.7.	Plot Data Hasil Simulasi Fungsi Percobaan ET .....	5
Gambar 5.8.	Plot Data Aktual dan Prediksi Simulasi ET .....	97
Gambar 5.9.	Plot Data Hasil Simulasi Fungsi Percobaan EP.....	98
Gambar 5.10.	Plot Data Aktual dan Prediksi Simulasi EP.....	100
Gambar 5.11.	Plot Data Hasil Simulasi Fungsi Percobaan TP.....	101
Gambar 5.12.	Plot Data Aktual dan Prediksi Simulasi TP.....	103
Gambar 5.13.	Nilai Rata-rata Kadar suPAR dan Jumlah Monosit .....	111
Gambar 5.14.	Perbandingan Estimasi Regresi Parametrik LMM dan Regresi Nonparametrik <i>Spline</i> antara $x_1$ terhadap $y_1$ dan $y_2$ pada subyek <i>Minimal Lesson</i> .....	117
Gambar 5.15.	Perbandingan Estimasi Regresi Nonparametrik <i>Spline</i> dengan Bobot mempertimbangkan korelasi dan tanpa korelasi antara $x_1$ terhadap $y_1$ dan $y_2$ pada subyek <i>Minimal Lesson</i> .....	118
Gambar 5.16.	Estimator <i>Spline</i> $x_1$ dan $x_2$ terhadap $y_1$ dan $y_2$ pada Data TB Paru .....	119
Gambar 5.17.	Estimator <i>Spline</i> $x_1$ terhadap $y_1$ dan $y_2$ pada Data TB Paru.....	120



## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Jumlah Kasus TB dan Angka Kematian hingga Tahun 2014.....	30
Tabel 2.2	Jumlah Kasus TB dan Angka Kematian Kelompok HBC.....	31
Tabel 3.1	Struktur Data Longitudinal .....	37
Tabel 3.2	Koefisien Fungsi Eksponensial, Trigonometri, Polinomial.....	43
Tabel 5.1.	Parameter Penghalus pada simulasi fungsi percobaan EE .....	87
Tabel 5.2.	Estimasi Parameter Model pada simulasi fungsi percobaan EE.	87
Tabel 5.3.	Parameter Penghalus pada simulasi fungsi percobaan TT .....	90
Tabel 5.4.	Estimasi Parameter Model pada simulasi fungsi percobaan TT.	90
Tabel 5.5.	Parameter Penghalus pada simulasi fungsi percobaan PP.....	93
Tabel 5.6.	Estimasi Parameter Model pada simulasi fungsi percobaan PP.	93
Tabel 5.7.	Parameter Penghalus pada simulasi fungsi percobaan ET .....	96
Tabel 5.8.	Estimasi Parameter Model pada simulasi fungsi percobaan ET.	96
Tabel 5.9.	Parameter Penghalus pada simulasi fungsi percobaan EP.....	99
Tabel 5.10.	Estimasi Parameter Model pada simulasi fungsi percobaan EP.	99
Tabel 5.11.	Parameter Penghalus pada simulasi fungsi percobaan TP.....	102
Tabel 5.12.	Estimasi Parameter Model pada simulasi fungsi percobaan TP.	102
Tabel 5.13.	Nilai $R^2$ berbagi variasi ukuran pengamatan dan fungsi .....	104
Tabel 5.14.	Nilai $RMSE$ berbagi variasi ukuran pengamatan dan fungsi .....	104
Tabel 5.15.	Nilai $R^2$ dan $RMSE$ pada tingkat korelasi & matriks varians.....	105
Tabel 5.16.	Nilai $R^2$ dan $RMSE$ pada tingkat korelasi rendah dan tinggi .....	108
Tabel 5.17.	Deskripsi Prediktor Indeks Masa Tubuh .....	109
Tabel 5.18.	Deskripsi Prediktor Laju Endapan Darah.....	109
Tabel 5.19.	Deskripsi Respon Kadar suPAR .....	110
Tabel 5.20.	Deskripsi Respon Jumlah Monosit.....	110
Tabel 5.21.	Uji Korelasi Antar Respon antar tiap subyek .....	111
Tabel 5.22.	Uji Autokorelasi Antar Pengamatan pada Subyek yang Sama...	112
Tabel 5.23.	Uji Non-Linieritas <i>Ramsey Reset Test</i> .....	113
Tabel 5.24.	Pemilihan orde $m$ pada Data Penderita TB Paru.....	113





Tabel 5.25. Pemilihan Parameter Penghalus pada Data Penderita TB Paru.. 114

Tabel 5.26. Estimasi Parameter pada Data Penderita TB Paru ..... 115

Tabel 5.27. Hasil Validasi Silang Data Penderita TB Paru ..... 116



## DAFTAR LAMBANG DAN ARTI

$y_{kit}$  : respon ke  $k$ , dari subyek ke  $i$ , pada observasi ke  $t$ , untuk  
 $k = 1, 2; i = 1, 2, \dots, N; \text{ dan } t = 1, 2, \dots, T$

$x_{t\ell}$  : prediktor ke  $\ell$ , dari subyek ke  $i$ , pada observasi ke  $t$ , untuk  
 $\ell = 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, N; \text{ dan } t = 1, 2, \dots, T$

$\varepsilon_{kit}$  : *error random* dari hasil estimasi respon ke  $k$ , dari subyek ke  $i$ , pada  
 observasi ke  $t$ , untuk  $k = 1, 2; i = 1, 2, \dots, N, \text{ dan } t = 1, 2, \dots, T$

$q$  : banyaknya respon

$p$  : banyaknya prediktor

$N$  : banyaknya subyek

$T$  : banyaknya waktu pengamatan tiap subyek

$M$  : banyaknya pengamatan secara keseluruhan, dimana  $M = qNT$

$m$  : orde polinomial *spline* ( $m=2$  linier,  $m=3$  kuadrat,  $m=4$  kubik,  $m=5$   
 kuartik)

$f_{t\ell ki}$  : kurva regresi hubungan prediktor ke  $\ell$  dengan respon ke  $k$ , pada  
 subyek ke  $i$  untuk  $k = 1, 2$  dan  $i = 1, 2, \dots, N$

$\lambda_{t\ell ki}$  : parameter penghalus yang berkaitan hubungan antara prediktor ke  $\ell$   
 dengan respon ke  $k$  pada subyek ke  $i$  untuk  
 $k = 1, 2$  dan  $i = 1, 2, \dots, N$

$R(f)$  : fungsi yang mengukur kecocokan data (*goodness of fit*), didefinisikan  
 sebagai  $R(f) = M^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f})$

$J(f)$  : fungsi yang mengukur kekasaran kurva (*roughness penalty*),

didefinisikan sebagai  $J(f) = \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{t\ell ki} \int_{a_{t\ell ki}}^{b_{t\ell ki}} (f_{t\ell ki}^{(m)}(x_{t\ell ki}))^2 dx_{t\ell ki}$

$W_2^m$  : Ruang *Sobolev* yang didefinisikan sebagai  $\{f: f^{(j)}$  kontinu absolut  
 pada  $[a, b]$  dan  $f^{(m)} \in L_2[a, b]\}$  dengan  $L_2[a, b]$  adalah himpunan fungsi-  
 fungsi kuadrat yang terintegral pada interval  $[a, b]$ .



$\mathcal{L}_x$  : Fungsi yang menghubungkan  $f$  dengan  $f(x)$  dimana hubungannya terbatas pada fungsional linear

$\mathcal{H}$  : Ruang yang didefinisikan memiliki fungsional linier terbatas pada ruang *Hilbert*, dimana  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ , dengan  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1^\perp$

$\Sigma$  : Matriks varians-kovarians *random error*

$\mathbf{U}$  : Matriks  $\mathbf{U} = \Sigma^{-1}\mathbf{V} + M\Lambda$ .

*GCV* : *Generalized Cross Validation*

*RMSE* : *Root of Mean Square Error*

*RMSEP* : *Root of Mean Square Error Prediction*

$R^2$  : Koefisien Determinasi

*PWLS* : *Penalized Weighted Least Square*

*RKHS* : *Reproducing Kernel Hilbert Space*, yaitu *hilbert space* dari setiap fungsi bilangan real pada  $[a, b]$  dengan sifatnya bahwa setiap  $x \in [a, b]$

akan ada fungsi  $\mathcal{L}_x$  yang menghubungkan  $f$  dengan  $f(x)$  dimana hubungannya terbatas pada fungsional linear

$P_1$  : Proyeksi ortogonal  $f_{11}$  ke  $\mathcal{H}_1$  dalam  $W_2^m[a_{ki}, b_{ki}]$

$\mathbf{T}$  : Matriks *full rank* berukuran  $(2NT) \times (2Nm)$  untuk prediktor tunggal, dalam *RKHS* ditetapkan sebagai bentuk *reproducing kernel* di ruang

$\mathcal{H}_0$  dimana elemennya berisi  $\langle \eta_{kit}, \phi_{kij} \rangle = \mathcal{L}_{kit} \phi_{kij}$

$\mathbf{V}$  : Matriks *full rank* berukuran  $(2NT) \times (2NT)$  untuk prediktor tunggal, dalam *RKHS* ditetapkan sebagai bentuk *reproducing kernel* di ruang

$\mathcal{H}_1$  dimana elemennya berisi  $\langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle = \mathcal{L}_{kit} \xi_{kis} = R_1(x_{kit}, x_{kis})$

$\mathbf{T}^*$  : Matriks *full rank* berukuran  $(2NT) \times (2Nm)$  untuk prediktor ganda, dalam *RKHS* ditetapkan sebagai bentuk *reproducing kernel*

di ruang  $\mathcal{H}_0$  dimana elemennya berisi  $\langle \eta_{kit}, \phi_{kij} \rangle = \mathcal{L}_{kit} \phi_{kij}$

$\mathbf{V}^*$  : Matriks *full rank* berukuran  $(2NT) \times (2NT)$  untuk prediktor ganda, dalam *RKHS* ditetapkan sebagai bentuk *reproducing kernel*

di ruang  $\mathcal{H}_1$  dimana elemennya berisi  $\langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle = \mathcal{L}_{kit} \xi_{kis} = R_1(x_{kit}, x_{kis})$





$\tilde{d}$  : Vektor berukuran  $2Nm$ , yang melekat (sebagai konstanta) dari matriks

$T$  dan  $T^*$ , yang akan diduga nilainya dalam PWLS

$\tilde{c}$  : Vektor berukuran  $2NT$ , yang melekat (sebagai konstanta) dari matriks

$V$  dan  $V^*$ , yang akan diduga nilainya dalam PWLS

EE : kelompok data bangkitan dari fungsi Eksponensial untuk  $x_{1i}$  dan  $x_{2i}$

TT : kelompok data bangkitan dari fungsi Trigonometri untuk  $x_{1i}$  dan  $x_{2i}$

PP : kelompok data bangkitan dari fungsi Polinomial untuk  $x_{1i}$  dan  $x_{2i}$

ET : kelompok data bangkitan dari fungsi Eksponensial untuk  $x_{1i}$  dan

Trigonometri untuk  $x_{2i}$

EP : kelompok data bangkitan dari fungsi Eksponensial untuk  $x_{1i}$  dan

Polinomial untuk  $x_{2i}$ .

TP : kelompok data bangkitan dari fungsi Trigonometri untuk  $x_{1i}$  dan

Polinomial untuk  $x_{2i}$ .



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Analisis regresi adalah salah satu metode yang digunakan untuk mendapatkan pola hubungan antara prediktor dengan respon. Terdapat tiga jenis data yang digunakan dalam analisis regresi yaitu *cross-section*, *time-series*, dan longitudinal. Data longitudinal merupakan gabungan dari data *cross-section* dan *time-series*, yaitu data yang diperoleh dari pengamatan  $N$  subyek yang saling independen dengan setiap subyek diamati secara berulang dalam  $T$  kurun waktu dan antar pengamatan dalam subyek yang sama saling berkorelasi (Diggle, Liang & Zeger, 2006).

Hubungan antara  $p$  prediktor dengan respon tunggal untuk data longitudinal  $(x_{1it}, x_{2it}, \dots, x_{pit}, y_{it})$  mengikuti model regresi sebagai berikut:

$$y_{it} = \sum_{t=1}^p f_{ti}(x_{ti}) + \varepsilon_{it}; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (1.1)$$

$x_{1it}$  adalah prediktor yang menyatakan waktu pengamatan dan  $x_{2it}, x_{3it}, \dots, x_{pit}$  adalah  $(p-1)$  prediktor lainnya yang diduga berpengaruh terhadap respon  $y_{it}$  (Wu & Zhang, 2006). Kurva regresi  $f_{ti}$  menggambarkan hubungan antara prediktor  $x_{ti}$  dengan respon  $y_{it}$  untuk setiap subyek ke- $i$ , sedangkan  $\varepsilon_{it}$  adalah *random error* pada subyek ke- $i$  dan pengamatan waktu ke- $t$ .

Kurva regresi  $f_{ti}$  dapat didekati dengan tiga cara yaitu parametrik, nonparametrik, atau semiparametrik. Pendekatan regresi parametrik digunakan apabila kurva regresi  $f_{ti}$  diasumsikan diketahui bentuknya, sedangkan pendekatan regresi nonparametrik digunakan apabila kurva regresi  $f_{ti}$  tidak/belum diketahui bentuknya. Di sisi lain, pendekatan regresi semiparametrik digunakan apabila kurva regresi  $f_{ti}$  sebagian diasumsikan diketahui bentuknya, dan sebagian lagi tidak/belum diketahui bentuknya (Eubank, 1999).



Regresi parametrik untuk data longitudinal telah banyak dikaji peneliti sebelumnya antara lain pendekatan *Mixed Effect Model* oleh Guo (2002), Liang, Wu & Carrol (2003) dan Antoniadis & Sapatinas (2007), dan pendekatan *Generalized Linear Mixed Model* oleh Liang & Zeger (1986), Verbeke & Molenberghs (2000). Kedua pendekatan di atas mengakomodir korelasi pengamatan pada subyek yang sama dengan cara penambahan efek tiap subyek yaitu *random effect* dari efek secara keseluruhan atau *fixed effect*. Gabungan *random* dan *fixed effect* ini kemudian di istilahkan sebagai *mixed effect*.

Regresi parametrik merupakan model regresi yang mengasumsikan pola hubungan antara respon dengan prediktor dapat digambarkan dalam suatu fungsi tertentu seperti pola garis lurus, polinomial, atau eksponensial, atau lainnya. Dalam aplikasi, untuk memperoleh fungsi tersebut secara tepat sangat sulit bahkan seringkali ditemukan gejala yang menunjukkan bahwa data yang diperoleh tidak atau belum menunjukkan pola hubungan yang mudah untuk digambarkan. Wu & Zhang (2006) menyatakan bahwa model regresi parametrik harus memenuhi asumsi bentuk hubungan linier antara respon dengan prediktornya. Jika asumsi linieritas tersebut tidak terpenuhi dan bentuk nonliniernya tidak/belum diketahui, maka salah satu alternatif yang dapat digunakan adalah model regresi nonparametrik.

Regresi nonparametrik merupakan pendekatan regresi yang sesuai untuk pola hubungan antara prediktor dengan respon yang tidak/belum diketahui bentuknya, atau tidak terdapat informasi masa lalu yang lengkap tentang pola hubungan (Eubank, 1999; Budiantara, 2000). Dalam pendekatan regresi nonparametrik, bentuk estimasi model pola hubungan ditentukan berdasarkan pada pola data yang ada. Pola hubungan antara respon dengan prediktor yang tidak diketahui dapat diestimasi dengan menggunakan pendekatan fungsi *Spline* (Craven & Wahba, 1979; Wahba, 1990; Budiantara, Subanar & Soejoeti, 1997), Polinomial Lokal (Fan & Gijbels, 1996), *Kernel* (Hardle, 1990), *Wavelets* (Antoniadis, Gregoire & McKeague, 1994), maupun Deret *Fourier* (Maliavin & Mancino, 2009). Pendekatan *spline* memiliki fleksibilitas yang tinggi dan mampu menangani pola hubungan data yang perilakunya berubah-ubah pada sub-sub interval tertentu (Eubank, 1999). Hal ini juga telah ditunjukkan oleh Liang (2006) yang



membandingkan fungsi *smoothing spline* dengan *kernel* secara numerik, dan Aydin (2007) yang membandingkan fungsi *smoothing spline* dengan *kernel* yang secara numerik lebih baik fungsi *spline*.

Aplikasi model regresi dapat digunakan untuk data longitudinal yang terdiri atas beberapa subyek yang diamati pada beberapa waktu pengamatan. Perbedaan penggunaan model regresi untuk data longitudinal yaitu adanya korelasi pada pengamatan yang berasal dari subyek yang sama. Pendekatan estimasi fungsi *spline* pada model regresi nonparametrik untuk data longitudinal pada dasarnya dibagi menjadi dua bentuk yaitu *Penalized Spline* (Heckman, Lockhart & Nielsen, 2009), dan *Smoothing Spline* (Hoover, Rice, Wu, & Yang, 1998, Budiantara, Lestari, & Islamiyati, 2009). Penggunaan bentuk regresi pada pendekatan *penalized spline* memerlukan ketepatan dalam penentuan banyaknya knot maupun lokasi knot. Di sisi lain, pendekatan *smoothing spline* tidak memerlukan pemilihan knot, mengingat fungsi tersebut diestimasi berdasarkan kriteria kesesuaian model dan ukuran kemulusan kurva yang diatur oleh parameter penghalus. Hal ini menunjukkan bahwa pendekatan *smoothing spline* memiliki fleksibilitas yang lebih baik dibandingkan pendekatan *penalized spline*.

Model regresi, selain dibedakan berdasarkan penggunaan data baik itu *cross-section* maupun longitudinal, juga dibedakan berdasarkan banyaknya respon yang terlibat, yaitu model regresi respon tunggal dan multirespon. Model respon tunggal, seperti yang telah banyak dikembangkan peneliti sebelumnya, terdiri atas satu respon tunggal yang dipengaruhi oleh satu atau beberapa prediktor. Di sisi lain, model multirespon terdiri dari beberapa model dengan asumsi terdapat korelasi antar respon. Beberapa peneliti telah mengkaji regresi nonparametrik multirespon untuk data *cross-section* diantaranya Wang, Guo & Brown (2000), Matias (2005), dan Lestari, Budiantara, Sunaryo, & Mashuri (2010) dengan pendekatan *smoothing spline*, serta Chamidah, Budiantara, Sunaryo, & Zain (2012) dengan pendekatan polinomial lokal. Pada dasarnya, tujuan pemodelan multirespon adalah untuk mendapatkan model yang lebih baik daripada pemodelan respon tunggal, mengingat model ini tidak hanya mempertimbangkan pengaruh prediktor terhadap respon, akan tetapi juga hubungan antar respon. Representasi hubungan antar



respon biasanya dinyatakan dalam bentuk matriks varians kovarians, yang digunakan sebagai pembobot pada estimasi parameter model.

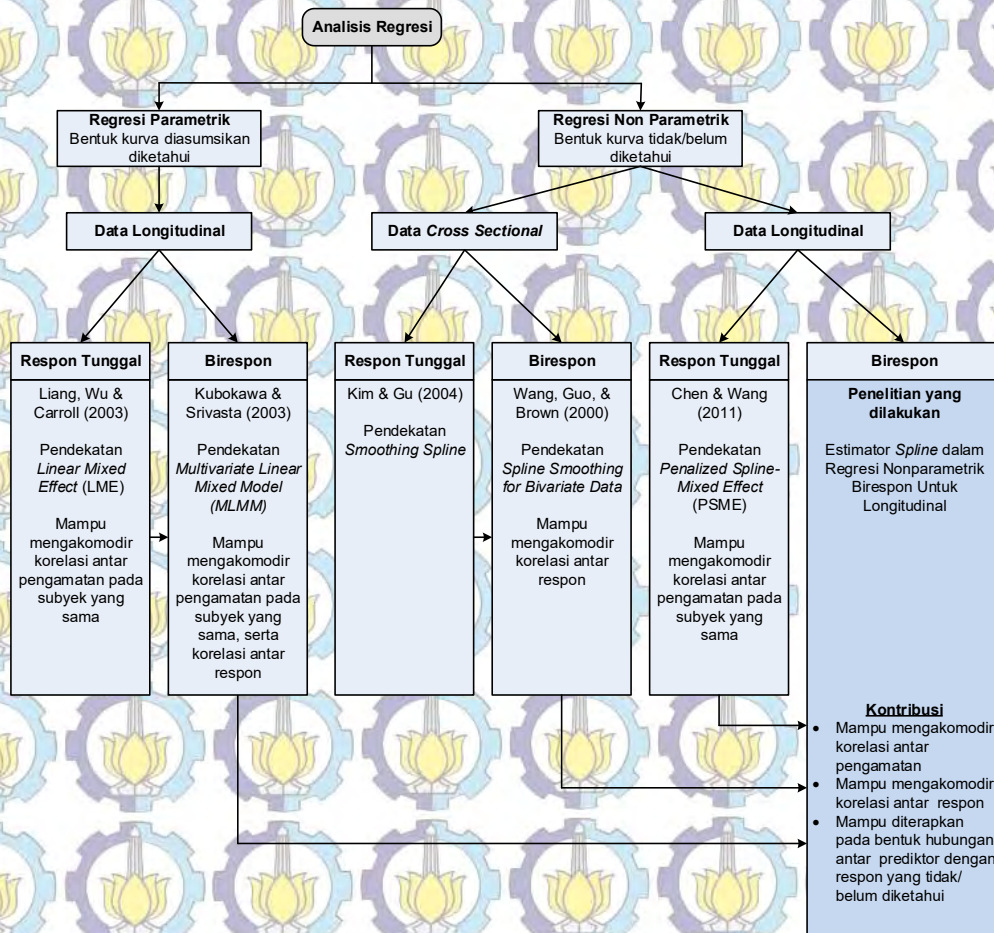
Penelitian ini mengembangkan estimator *spline* birespon khusus untuk data longitudinal. Kurva regresi  $f_{ti}$  yang digunakan pada persamaan (1.1) diasumsikan mulus, dalam arti termuat dalam suatu ruang fungsi tertentu, khususnya ruang *Sobolev* atau ditulis  $f_{ti} \in W_2^m[a_{ti}, b_{ti}]$ , dengan  $m$  adalah ordo polinomial *spline*.

Untuk mendapatkan estimasi kurva regresi  $f_{ti}$  digunakan optimasi *Weighted Least Square* (WLS), ataupun *Penalized Weighted Least Square* (PWLS) (Budiantara, Lestari, & Islamiyati, 2009). Keunggulan PWLS dibandingkan WLS adalah mempertimbangkan ukuran kekasaran kurva (*roughness penalty*), selain ukuran kecocokan data (*goodness of fit*). Pada optimasi PWLS digunakan parameter penghalus untuk mengontrol *goodness of fit* dan *roughness penalty*. Bobot (*weighted*) pada optimasi PWLS digunakan untuk mengakomodir korelasi antar pengamatan (untuk data longitudinal) dan korelasi antar respon (untuk multirespon) (Wang, 2003). Kemildroft & Wahba (1971) memaparkan penyelesaian optimasi PWLS dengan *Reproducing Kernel Hilbert Space* (RKHS). Optimasi PWLS dapat ditransformasikan menjadi suatu persoalan proyeksi pada suatu ruang *Hilbert* (Speckman, 1980). Sifat yang sangat penting dari *Reproducing Kernel* adalah dapat menentukan representasi dari fungsional linier terbatas, sehingga dapat diperoleh kurva regresi  $f_{ti}$  yang merupakan penyelesaian yang optimal dari PWLS.

Gambar 1.1 menjelaskan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya dan penelitian yang saat ini dilakukan. Pemodelan regresi parametrik multirespon untuk data longitudinal telah banyak dikerjakan oleh beberapa penelitian sebelumnya, salah satunya pendekatan *Multivariate Linear Mixed Model* oleh Kubokawa & Srivastava (2003). Verbeke, Fievs, Molenberghs & Davidan (2014) juga telah mengembangkan model regresi parametrik multirespon untuk data longitudinal dengan pengembangan random effect model untuk mengatasi korelasi antar data pengamatan pada subyek yang sama, dan korelasi antar respon. Pendekatan ini mampu mengakomodir korelasi pengamatan pada subyek yang sama menggunakan pendekatan *mixed effect* dan invers dari matriks varians-kovarians *error random*



atau  $\Sigma^{-1}$  sebagai pembobot guna mengakomodir korelasi antar respon. Akan tetapi, penelitian di atas hanya mampu dipakai jika pola hubungan antar respon dengan prediktor dapat digambarkan dalam suatu fungsi tertentu yang telah diketahui bentuknya.



**Gambar 1.1:** Posisi Penelitian Sebelumnya dan Sekarang

Regresi nonparametrik dapat digunakan sebagai pendekatan pada pola data yang tidak/belum diketahui bentuknya, khusus untuk aplikasi pada data longitudinal telah dikembangkan, salah satunya pendekatan *Penalized Spline Mixed Effect* oleh Chen & Wang (2011), yang mampu mengakomodir korelasi antar pengamatan pada subyek yang sama melalui penggunaan fungsi *spline* yang berbeda pada tiap subyeknya. Di sisi lain, regresi nonparametrik dengan pendekatan multirespon untuk data *cross-section* telah dikembangkan, salah satunya oleh



Wang, Guo & Brown (2000) dengan pendekatan *smoothing spline for bivariate data* yang menggunakan invers dari matriks varians kovarians sebagai pembobot dalam mengestimasi parameter model.

Pendekatan estimator *spline* pada data longitudinal dan estimator *spline* pada model regresi multirespon yang telah dikerjakan oleh beberapa peneliti di atas, telah memberikan kajian yang cukup mendalam baik dalam proses pemilihan parameter penghalus, estimasi parameter dalam model, maupun kajian korelasi antar pengamatan pada subyek yang sama, dan korelasi antar respon pada model multirespon. Oleh karena itu, diperlukan kajian lebih mendalam yang mampu mengulas model regresi pada data longitudinal yang diikuti dengan model yang mencakup multirespon, dimana terjadi korelasi antar respon. Xiang, Qie & Pu (2013) telah mengkaji model regresi nonparametrik multirespon untuk data longitudinal dengan pendekatan polinomial lokal *kernel*. Di sisi lain Ghosh & Hanson (2014) telah mengembangkan regresi semiparametrik multirespon untuk data longitudinal dengan pendekatan *Bayesian Multivariate Mixed Model*. Hingga kini belum ada peneliti yang mengkaji estimator *spline* birespon untuk data longitudinal.

Pada penelitian ini, model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal dengan pendekatan estimator *spline* diimplementasikan pada data penyakit Tuberkulosis paru (TB paru). TB Paru adalah penyakit menular yang disebabkan oleh kuman *Mycobacterium tuberculosis*. Bakteri ini dapat menyerang paru dan organ tubuh lain. Dalam WHO Report tahun 2014, Indonesia berada pada peringkat ke 4 dunia dengan jumlah penderita TB terbanyak yaitu 327 ribu penduduk TB, dan sekitar 2% dari penderita TB mengalami kematian (mortalitas).

Upaya pengendalian TB paru sangat tergantung pada diagnosa yang tepat, pengobatan yang benar, dan upaya *monitoring* serta evaluasi terhadap pengobatan. Pada tahap *monitoring*, dalam lima tahun terakhir ditemukan penanda biologis (*biology marker*) yang disebut dengan uPAR atau *urokinase plasminogen activator receptor*. uPAR merupakan komponen inti dari *plasminogen activation system*, sebagai *receptor* seluler untuk *serine protease urokinase plasminogen activator* (uPA). uPAR dapat dipecah dan dilepaskan dari permukaan sel oleh beberapa



*protease*, seperti *chymotrypsis*, *phospholipases* dan uPA menjadi bentuk terlarut (*soluble*) yang disebut suPAR yaitu *soluble urokinase plasminogen activator receptor* (Minji, Keena, Lihua, & Steven, 2003). Oelsen, Gustafson, Sidenius, Fischer, Parner, Aaby, Gomes, & Lisse (2002) menyebutkan bahwa kadar suPAR dapat dijadikan sebagai alat prognostik pada penderita TB paru maupun HIV.

Penanda biologis lainnya pada perkembangan penyakit TB paru adalah jumlah monosit. Monosit berada dalam darah dan di berbagai jaringan tubuh, mencakup 2-8% dari leukosit atau sel darah putih. Jumlah monosit yang tinggi umumnya menunjukkan adanya infeksi bakteri. Variabel kadar suPAR dan jumlah monosit sebagai penanda biologis sebagai *monitoring* penyakit TB paru. Pengukuran kadar suPAR dan jumlah monosit tergolong pada jenis data longitudinal mengingat pengamatan dilakukan berulang kali pada suatu interval waktu tertentu.

Beberapa peneliti telah mendapatkan model hubungan kadar suPAR dan jumlah monosit sebagai penanda biologis *monitoring* penyakit TB paru. Astuti (2008) meneliti mengenai suPAR maupun jumlah monosit sebagai agen *monitoring* terapi Obat Anti Tuberkulosis (OAT) pada penderita TB paru dengan menggunakan analisis regresi. Hasil penelitian tersebut memperlihatkan bahwa peningkatan kadar suPAR dan jumlah monosit dalam serum darah penderita TB paru secara beriringan mengalami penurunan pada masa pengobatan dua bulan pertama. Chozin (2012) meneliti perkembangan kadar suPAR dan jumlah monosit pada beberapa pasien TB paru yang diamati secara berulang antara rentang 0-6 bulan pada tiap interval dua minggu, memperlihatkan fluktuatif kedua kadar tersebut. Kedua penelitian di atas masih memodelkan kedua variabel (kadar suPAR dan jumlah monosit) secara parsial, padahal kenyataannya jika dilihat dari aspek biologis kedua kadar tersebut saling berkorelasi.

Berdasarkan atas beberapa kajian literatur maupun penelitian terdahulu di atas, penelitian ini dilakukan untuk memperoleh estimator *spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal. Kajian awal difokuskan untuk mendapatkan estimator *spline* dalam mengestimasi kurva regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal. Kajian berikutnya adalah menerapkan hasil kajian



teoritik pada data simulasi berdasarkan fungsi percobaan Eksponensial, Trigonometri, maupun Polinomial, dan data riil yaitu data penyakit TB paru pasien Rumah Sakit Syaiful Anwar (RSSA) Malang tahun 2011.

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka disusun rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mendapatkan estimator *spline* dan pemilihan parameter penghalus optimal untuk mengestimasi kurva regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal?
2. Bagaimana mengaplikasikan model regresi nonparametrik birespon *spline* pada data simulasi?
3. Bagaimana mengaplikasikan model regresi nonparametrik birespon *spline* pada data pasien penderita TB paru di RSSA Malang?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan pada perumusan masalah dalam subbab sebelumnya, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan bentuk estimator *spline* dan pemilihan parameter penghalus optimal untuk mengestimasi kurva regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal.
2. Mengaplikasikan model regresi nonparametrik birespon *spline* pada data simulasi.
3. Mengaplikasikan model regresi nonparametrik birespon *spline* data pasien penderita TB paru di RSSA Malang.

## 1.4 Orisinalitas dan Kontribusi Penelitian

Orisinalitas teori dan aplikasi yang dikembangkan dalam disertasi ini adalah mengembangkan estimator *spline* untuk mengestimasi fungsi regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal yang mencakup tiga aspek secara simultan yaitu (1) mampu mengakomodir korelasi antar data pengamatan pada subyek yang sama, (2) mampu mengakomodir korelasi antar respon, dan (3)



memperoleh model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal pada data pasien penderita TB paru di RSSA Malang.

Pada aspek aplikasi, penelitian ini bertujuan untuk menghasilkan estimasi fungsi kadar suPAR dan jumlah monosit sebagai penanda biologis sebagai *monitoring* penyakit TB paru pada periode 0-6 bulan masa pengobatan pasien, yang dikaitkan dengan perkembangan laju endapan darah dan indeks masa tubuh pasien.

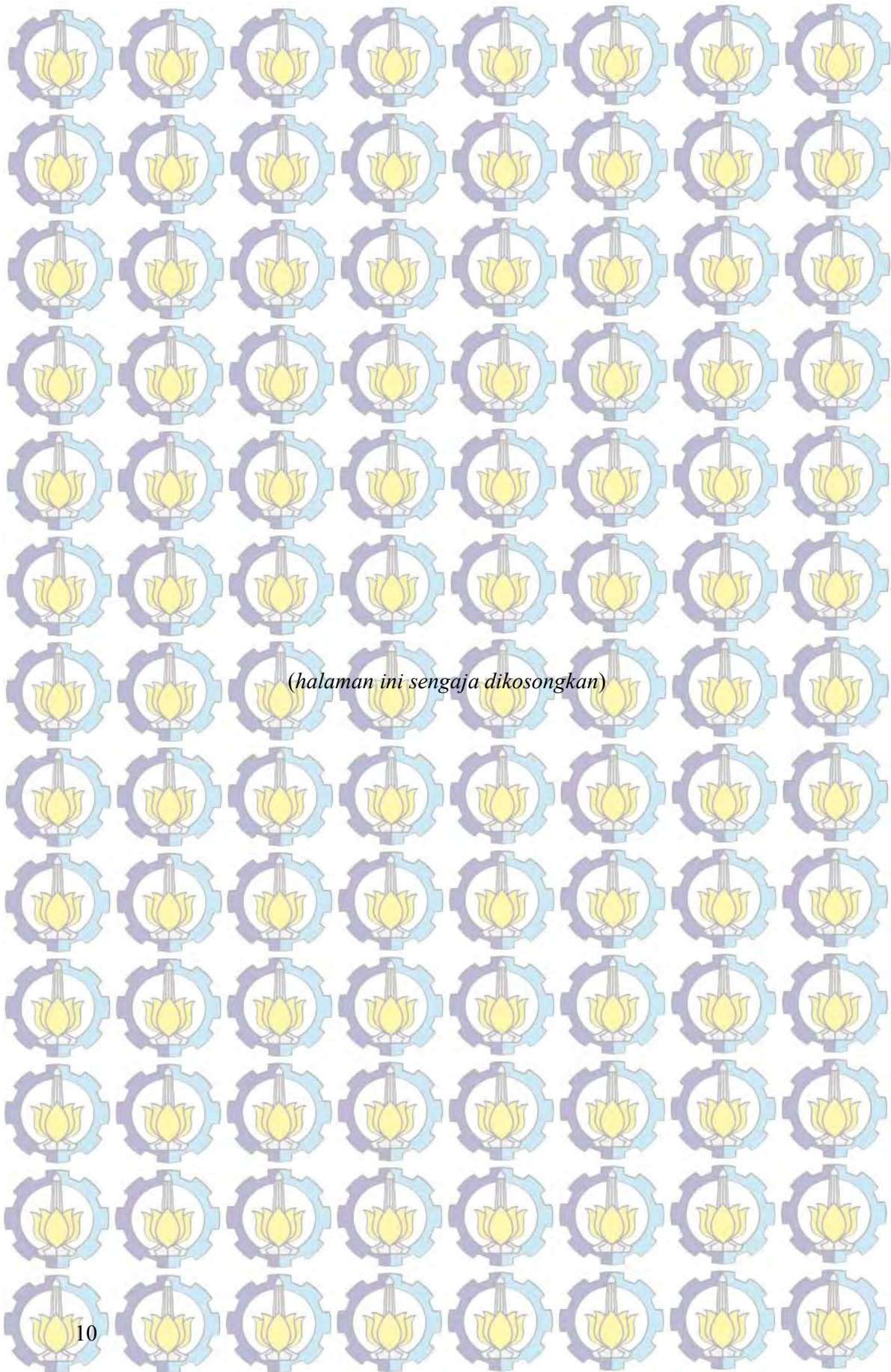
Diperolehnya estimasi tersebut berkontribusi sebagai *monitoring* dan percepatan proses penyembuhan penderita TB paru.

### 1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini membatasi masalah sebagai berikut:

1. Respon dan prediktor menggunakan skala ukur interval atau rasio.
2. Antar prediktor bersifat aditif.
3. Antara prediktor dengan respon memiliki bentuk hubungan tidak linier dan belum diketahui bentuk polanya.
4. Data longitudinal yang digunakan memiliki jumlah pengamatan ( $T$ ) pada tiap subyek adalah sama atau seimbang.
5. Data simulasi yang digunakan berasal dari fungsi eksponensial, trigonometri, dan polinomial dengan penggunaan 2 variabel prediktor, serta 3 subyek.







## BAB 2

### KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

#### 2.1 Data Longitudinal

Data longitudinal disebut juga *repeated measurement data*, merupakan pengamatan yang dilakukan pada  $N$  subyek yang saling independen dengan setiap subyek diamati secara berulang dalam  $T$  kurun waktu. Pada data longitudinal, antara pengamatan dalam subyek yang sama adalah dependen atau saling berkorelasi (Diggle, Liang & Zeger, 2006; Weiss, 2005).

Data longitudinal mempunyai karakteristik yang berbeda jika dibandingkan dengan data *time-series* maupun data *cross-section*. Pada data longitudinal tersusun atas sejumlah *time series* yang relatif pendek, karena memungkinkan hanya terdiri atas dua atau tiga waktu pengukuran yang berbeda untuk setiap subyeknya. Di sisi lain, pada data *time series* terdiri atas satu subyek yang memiliki urutan waktu yang relatif panjang (Verbeke & Molenberghs, 2000). Pada data longitudinal, pengamatan antara tiap subyek diasumsikan independen satu sama lainnya, tetapi pengamatan dalam subyek yang sama adalah dependen (Wu & Zhang, 2006). Disisi lain, data *cross-section* antar pengamatan diasumsikan independen.

#### 2.2 Reproducing Kernel Hilbert Space

Teori *Reproducing Kernel Hilbert Space* (RKHS) pertama kali dikenalkan oleh Aronszajn pada tahun 1950 (Wahba, 1990). Teori ini kemudian dikembangkan oleh Kimeldorf & Wahba (1971) dan Wahba (1990) untuk menyelesaikan persoalan optimasi dalam regresi, khususnya regresi nonparametrik *spline original*. Pendekatan RKHS juga dikenalkan oleh Cox (1983) untuk estimator *spline type-M*. Di sisi lain, Oehlert (1992) menggunakan pendekatan ini untuk estimator *relaxed spline*. Sebelum disajikan RKHS lebih detail disajikan ruang vektor dan operatornya, dan *reproducing kernel*.

##### Definisi 2.1. Ruang Vektor

1. Ruang Vektor  $X$  disebut memiliki *norm* jika terdapat fungsi bernilai riil dan untuk sembarang  $x_1, x_2 \in X$ , dan  $\alpha$  skalar berlaku (Kreyszig, 1978):





i.  $\|x_1\| \geq 0$ .

ii.  $\|x_1\| = 0 \Leftrightarrow x_1 = \underline{0}$ .

iii.  $\|\alpha x_1\| = |\alpha| \|x_1\|$ .

iv.  $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ .

2. Ruang vektor  $X$  disebut ruang *inner product* jika untuk sembarang  $x, y, z$  dan

skalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ , berlaku:

i)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ .

ii)  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ .

iii)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ .

iv)  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$ .

Ruang *inner product* pada  $X$  mendefinisikan *norm* pada  $X$  dengan bentuk

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

dan *metric* pada  $X$  dengan bentuk :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

3. Untuk sebarang ruang *inner product* berlaku (Berberian, 1961):

i)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ .

ii)  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ .

iii)  $\langle \underline{0}, y \rangle = \langle x, \underline{0} \rangle = 0$ .

iv)  $\langle x - y, z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle y, z \rangle$ ,

$$\langle x, y - z \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, z \rangle.$$

v) Jika  $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$  untuk setiap  $z$ , maka  $x = y$ .

4. Elemen  $x_1$  dari ruang *inner product*  $X$  dikatakan ortogonal ke elemen  $x_2 \in X$

jika  $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ .



5. Secara fungsional linear terbatas  $f$  dalam ruang Hilbert  $\mathcal{H}$  dapat direpresentasikan dalam bentuk *inner product*, yaitu  $f = \langle x, x \rangle$ .
6. Ruang vektor  $X$  dikatakan jumlahan langsung atas dua sub ruang  $\mathcal{H}_0$  dan  $\mathcal{H}_1$  pada  $\mathcal{H}$ , yaitu  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ , jika  $x \in \mathcal{H}$  mempunyai representasi tunggal  $x = y + z$ .

### Definisi 2.2. RHKS

*Reproducing kernel* dari suatu ruang Hilbert  $\mathcal{H}$  adalah suatu fungsi  $R$  yang didefinisikan pada  $[a,b] \times [a,b]$  sedemikian hingga untuk setiap titik tertentu,  $x \in [a,b]$ , berlaku  $R_x \in \mathcal{H}$ , dengan

$$R_{x_t}(x_s) = R(x_t, x_s), \text{ dan } f(t) = \langle R_{x_t}, f \rangle, f \in \mathcal{H}. \quad (2.1)$$

RKHS adalah suatu ruang Hilbert dari fungsi-fungsi bernilai real pada  $[a,b]$  dengan sifat bahwa untuk setiap  $x \in [a,b]$ , fungsional  $\mathcal{L}_x f = f(x)$  merupakan fungsional linier terbatas, dalam arti terdapat bilangan real  $\delta > 0$  sedemikian hingga

$$|\mathcal{L}_x f| = |f(x)| \leq \delta \|f\|. \quad (2.2)$$

*Reproducing kernel* dari  $\mathcal{H}$  adalah suatu fungsi  $R$  yang didefinisikan pada  $[a,b] \times [a,b]$  sedemikian hingga untuk setiap titik tetap  $x \in [a,b]$  berlaku

$R_x \in \mathcal{H}$  dengan  $R_{x_t}(x_s) = R(x_s, x_t)$  dan

$$\mathcal{L}_x f = \langle R_x, f \rangle = f(x), f \in \mathcal{H}. \quad (2.3)$$

Jika  $\mathcal{H}$  suatu RKHS, maka  $\mathcal{H}$  dapat didekomposisikan menjadi  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  dengan  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1^\perp$  dan  $\mathcal{H}_0$  dan  $\mathcal{H}_1$  masing-masing subruang di dalam  $\mathcal{H}$ . Salah satu hasilnya adalah polinomial *spline* orde  $m$  yang diperoleh dengan cara *reproducing kernel* sebagai berikut:

1. Diberikan ruang  $\mathcal{H}_0$  dengan  $\dim(\mathcal{H}_0) = m$  ( $m$  adalah orde polinomial *spline*)

dan dibangun oleh polinomial  $\phi(x) = \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}$ , untuk  $j = 1, 2, \dots, m$ . Jika diambil perkalian dalam (*inner product*)



$$\langle f, g \rangle_0 = \sum_{j=1}^m f^{(j-1)}(0) g^{(j-1)}(0)$$

maka  $\mathcal{H}_0$  merupakan RKHS dengan *reproducing kernel* sebagai berikut:

$$R_0(x_s, x_t) = \sum_{j=1}^m \phi_j(x_s) \phi_j(x_t)$$

2. Jika diberikan  $\mathcal{H}_1 = \{f : f^{(j-1)}(0) = 0, j=1, 2, \dots, m \text{ kontinu absolut pada } [a, b],$

$f^{(m)}(x) \in L_2[a, b]\}$ , maka  $\mathcal{H}_1$  merupakan RKHS dengan perkalian dalam

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_a^b f^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx,$$

dan *reproducing kernel*

$$R_1(x_s, x_t) = \int_a^b \frac{(x_s - u)_+^{m-1} (x_t - u)_+^{m-1}}{((m-1)!)^2} du.$$

*Norm* kuadrat untuk  $L_2[a, b]$  diberikan oleh  $\|f\|^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx$ .

3. Dengan perkalian dalam

$$\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle_0 + \langle f, g \rangle_1.$$

Ruang  $W_2^m = \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  merupakan RKHS dengan *reproducing kernel* sebagai berikut:

$$R(x_s, x_t) = R_0(x_s, x_t) + R_1(x_s, x_t).$$

$$R(x_s, x_t) = \sum_{j=1}^m \phi_j(x_s) \phi_j(x_t) + \int_a^b \frac{(x_s - u)_+^{m-1} (x_t - u)_+^{m-1}}{((m-1)!)^2} du.$$

*Norm* kuadrat diberikan oleh  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle f, f \rangle_0 + \langle f, f \rangle_1$ .

### 2.3 Spline dalam Regresi Nonparametrik

Pada bagian berikut akan dijelaskan secara terperinci estimator *spline* dalam regresi nonparametrik. Bagian pertama akan menjabarkan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik untuk data *cross-section* yang mengasumsikan antar pengamatan saling bebas. Bagian kedua akan menjelaskan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik untuk data longitudinal yang mengakomodir adanya korelasi



antar pengamatan pada subyek yang sama. Bagian ketiga akan menjelaskan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data *cross-section* yang mengakomodir adanya korelasi antar respon. Bagian keempat adalah pengembangan bagian kedua dan ketiga yaitu model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal.

### 2.3.1 *Spline* dalam Regresi Nonparametrik untuk Data *Cross-Section*

Analisis regresi digunakan untuk menyelidiki hubungan antara prediktor dengan respon melalui pendugaan kurva regresi  $f$ . Pendekatan regresi nonparametrik digunakan jika kurva regresi  $f$  tidak/belum diketahui bentuknya, sehingga bentuk estimasi kurva regresi  $f$  ditentukan berdasarkan pada data yang ada (Eubank, 1999). Beberapa peneliti telah mengembangkan estimator *spline* pada model regresi nonparametrik untuk data *cross-section*, seperti Budiantara (2000), Huang (2003), Crainiceanu, Ruppert & Wand (2004), Kim & Gu (2004), Lee (2004), dan Howell (2007).

Model regresi nonparametrik untuk data *cross-section* yang menyatakan hubungan antara prediktor tunggal dengan respon tunggal untuk data *cross-section* yang melibatkan  $N$  pengamatan sebagai berikut:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.4)$$

Selanjutnya, model regresi nonparametrik untuk data *cross-section* yang menyatakan hubungan antara  $p$  prediktor dengan respon tunggal seperti yang disajikan pada persamaan (2.4) menjadi persamaan (2.5) berikut:

$$y_i = f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \dots + f_p(x_{pi}) + \varepsilon_i; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.5)$$

atau dapat ditulis

$$y_i = \sum_{\ell=1}^p f_{\ell}(x_{\ell i}) + \varepsilon_i; \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Keterangan:

$y_i$  : respon pada pengamatan ke- $i$ ,

$x_{\ell i}$  : prediktor ke  $\ell$  pada pengamatan ke- $i$ ,

$f_{\ell}$  : kurva regresi hubungan prediktor ke- $\ell$  dengan respon,



$p$  : banyaknya prediktor,

$N$  : banyaknya pengamatan/subyek,

$\varepsilon_i$  : *random error* pada pengamatan ke- $i$ .

Nilai  $\varepsilon_i$  merupakan *random error* yang saling independen, berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan varians konstan sebesar  $\sigma^2$ .

Pendekatan *spline* secara umum menspesifikasikan  $f_\ell$  pada persamaan (2.5) dalam bentuk kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya. Kurva regresi  $f_\ell$  diasumsikan mulus (*smooth*) yang termuat dalam suatu ruang fungsi tertentu, khususnya ruang *Sobolev* atau ditulis  $f_\ell \in W_2^m[a_\ell, b_\ell]$  dengan:

$$W_2^m[a_\ell, b_\ell] = \left\{ f_\ell : f_\ell, f_\ell^{(1)}, \dots, f_\ell^{(m-1)} \text{ kontinu absolut; } \int_{a_\ell}^{b_\ell} [f_\ell^{(m)}(x_{ti})]^2 dx_{ti} < \infty \right\},$$

untuk suatu konstanta  $m$  yang menyatakan orde polinomial *spline*. Untuk mendapatkan estimasi kurva regresi  $f_\ell$  menggunakan optimasi:

$$\text{Min}_{f_\ell \in W_2^m[a_\ell, b_\ell]} \left[ N^{-1} \sum_{i=1}^N \left( y_i - \sum_{\ell=1}^p f_\ell(x_{ti}) \right)^2 \right],$$

dengan syarat  $\int_{a_\ell}^{b_\ell} [f_\ell^{(m)}(x_{ti})]^2 dx_{ti} \leq \gamma_\ell$ , untuk  $\gamma_\ell \geq 0$ .

*Spline* merupakan fungsi yang diperoleh dengan meminimumkan *Penalized Least Square* (PLS) yaitu kriteria estimasi yang menggabungkan *goodness of fit* dengan fungsi penalti (Budiantara, 2000; Wahba, 1990). Jika diberikan model (2.4) di atas, maka estimator kurva regresi  $f_\ell$  diperoleh dengan meminimumkan PLS berikut:

$$\text{Min}_{f_\ell \in W_2^m[a_\ell, b_\ell]} \left[ N^{-1} \sum_{i=1}^N \left( y_i - \sum_{\ell=1}^p f_\ell(x_{ti}) \right)^2 + \sum_{\ell=1}^p \lambda_\ell \int_{a_\ell}^{b_\ell} (f_\ell^{(m)}(x_{ti}))^2 dx_{ti} \right], \quad (2.6)$$

untuk setiap  $f_\ell$  di dalam ruang *Sobolev*  $W_2^m[a_\ell, b_\ell]$ .

Ruas pertama pada persamaan (2.6) merupakan fungsi yang mengukur kecocokan data (*goodness of fit*), sedangkan ruas kedua merupakan ukuran



kekasaran kurva (*roughness penalty*) dengan  $\lambda$ , sebagai  $p$  parameter penghalus yang mengontrol *goodness of fit* dan *roughness penalty*. Optimasi di atas jika tidak mempertimbangkan *roughness penalty* maka ekuivalen dengan optimasi *Ordinary Least Square* (OLS).

### 2.3.2 Spline dalam Regresi Nonparametrik untuk Data Longitudinal

Model regresi pada persamaan (2.4) menggunakan data *cross-section*. Pengembangan dari data *cross-section* dengan  $N$  subyek diamati secara berulang (*repeated measurement*) dalam  $T$  kurun waktu dikenal dengan data longitudinal.

Seperti yang telah dijelaskan pada sub-bab 2.1, model regresi nonparametrik untuk data longitudinal memiliki perbedaan dengan data *cross-section*, yang terletak pada pengamatan antar subyek diasumsikan independen satu sama lainnya, tetapi antara pengamatan dalam subyek yang sama adalah dependen (Wu & Zhang, 2006). Telah banyak peneliti mengembangkan estimator *spline* pada model regresi nonparametrik untuk data longitudinal seperti Verotta (1993), Lin, Wang, Welsh, & Carrol (2006), dan Budiantara dkk. (2009). Hubungan antara  $p$  prediktor dengan satu respon untuk data longitudinal yang melibatkan  $N$  subyek pada  $T$  pengamatan setiap subyek, mengikuti model regresi sebagai berikut:

$$y_{it} = \sum_{\ell=1}^p f_{\ell i}(x_{\ell it}) + \varepsilon_{it}; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (2.7)$$

Keterangan:

$y_{it}$  : respon pada subyek ke- $i$  dan pengamatan waktu ke- $t$ ,

$x_{\ell it}$  : prediktor ke  $\ell$  pada subyek ke- $i$  dan pengamatan waktu ke- $t$ ,

$f_{\ell i}$  : kurva regresi hubungan prediktor ke- $\ell$  dengan respon pada subyek ke- $i$ ,

$N$  : banyaknya subyek,

$T$  : banyaknya pengamatan setiap subyek,

$p$  : banyaknya prediktor,

$\varepsilon_{it}$  : *random error* pada subyek ke- $i$  dan pengamatan waktu ke- $t$ ,

Model regresi pada persamaan (2.7) menyertakan sebanyak  $pN$  kurva regresi  $f_{\ell i}$  yang mengakomodasi ada ketidakbebasan pengamatan pada subyek yang sama.



Pada model regresi nonparameterik untuk data longitudinal,  $x_{1it}$  adalah prediktor yang merupakan waktu pengamatan, dan  $x_{2it}, x_{3it}, \dots, x_{pit}$  adalah  $(p-1)$  prediktor lainnya yang berpengaruh terhadap respon  $y_{it}$ . *Random error*

$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{1T}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{2T}, \dots, \varepsilon_{N1}, \varepsilon_{N2}, \dots, \varepsilon_{NT})'$ , diasumsikan berdistribusi normal  $NT$ -variat, dengan  $mean E(\varepsilon) = 0$  (vektor berukuran  $NT$ ) dan matriks varians-kovarians  $Var(\varepsilon) = \Sigma$  (matriks berukuran  $NT \times NT$ ) sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{1(1,2)} & \dots & \sigma_{1(1,T)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_{1(2,1)} & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1(2,T)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1(T,1)} & \sigma_{1(T,2)} & \dots & \sigma_{1T}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{21}^2 & \sigma_{2(1,2)} & \dots & \sigma_{2(1,T)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{2(2,1)} & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2(2,T)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{2(T,1)} & \sigma_{2(T,2)} & \dots & \sigma_{2T}^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \sigma_{N1}^2 & \sigma_{N(1,2)} & \dots & \sigma_{N(1,T)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \sigma_{N(1,2)} & \sigma_{N2}^2 & \dots & \sigma_{N(1,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \sigma_{N(T,2)} & \sigma_{N(T,2)} & \dots & \sigma_{NT}^2 \end{bmatrix}_{(NT) \times (NT)} \quad (2.8)$$

Matriks  $\Sigma$  dapat disederhanakan menjadi sub-matriks  $\Sigma_i$  dan  $\mathbf{0}$ .

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Sigma_N \end{bmatrix}_{(NT) \times (NT)}$$

Sub-matriks  $\Sigma_i$  dan  $\mathbf{0}$  berukuran  $T \times T$ , disajikan sebagai berikut:

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_{i1}^2 & \sigma_{i(1,2)} & \dots & \sigma_{i(1,T)} \\ \sigma_{i(2,1)} & \sigma_{i2}^2 & \dots & \sigma_{i(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{i(T,1)} & \sigma_{i(T,2)} & \dots & \sigma_{iT}^2 \end{bmatrix}_{T \times T} \quad \text{dan} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$$

Elemen di luar diagonal yaitu  $\sigma_{i(1,2)}, \sigma_{i(2,1)}, \dots, \sigma_{i(T-1,T)}, \sigma_{i(T,T-1)}$  pada sub-matriks  $\Sigma_i$  adalah kovarians *random error* antar pengamatan pada subyek yang sama. Kovarians ini dapat bernilai tidak 0, yang mengakomodir adanya korelasi antar pengamatan pada subyek yang sama. Di sisi lain, sub-matriks  $\mathbf{0}$  yaitu matriks yang



seluruh elemen bernilai 0 menyatakan bahwa kovarians antar pengamatan pada subyek yang berbeda adalah saling independen.

Pendekatan *spline* secara umum menspesifikasikan  $f_{ti}$  pada persamaan (2.7) dalam bentuk kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya, tetapi  $f_{ti}$  diasumsikan mulus (*smooth*), dalam arti termuat dalam suatu ruang fungsi tertentu, khususnya ruang *Sobolev* atau ditulis  $f_{ti} \in W_2^m[a_{ti}, b_{ti}]$  dengan:

$$W_2^m[a_{ti}, b_{ti}] = \left\{ f_{ti} : f_{ti}, f_{ti}^{(1)}, \dots, f_{ti}^{(m-1)} \text{ kontinu absolut}; \int_{a_{ti}}^{b_{ti}} [f_{ti}^{(m)}(x_{tit})]^2 dx_{tit} < \infty \right\}, \quad (2.9)$$

untuk suatu konstanta  $m$  yang menyatakan orde polinomial *spline*. Berbeda halnya dengan estimasi kurva regresi  $f_t$  untuk data *cross-section* pada persamaan (2.4) menggunakan PLS, maka penyelesaian estimasi kurva regresi  $f_{ti}$  untuk data longitudinal pada persamaan (2.7) menggunakan *Penalized Weighted Least Square* (PWLS) yang melibatkan bobot berupa invers matriks varians-kovarians *random error* yang disimbolkan  $\Sigma$  seperti yang telah dipaparkan pada persamaan (2.8). Untuk mendapatkan estimasi kurva regresi  $f_{ti}$  menggunakan optimasi PWLS yaitu penyelesaian optimasi sebagai berikut (Eubank, 1999):

$$\text{Min}_{f_{ti} \in W_2^m[a_{ti}, b_{ti}], i=1, 2, \dots, p; t=1, 2, \dots, N} \left\{ M^{-1}(\tilde{y} - \tilde{f})^T \Sigma^{-1}(\tilde{y} - \tilde{f}) + \sum_{t=1}^p \sum_{i=1}^N \lambda_{ti} \int_{a_{ti}}^{b_{ti}} (f_{ti}^{(m)}(x_{tit}))^2 dx_{tit} \right\}, \quad (2.10)$$

dengan  $\tilde{y} = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1T}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2T}, \dots, y_{N1}, y_{N2}, \dots, y_{NT})^T$ , dan

$$\tilde{f} = \left( \sum_{t=1}^p f_{t1}(x_{t11}), \sum_{t=1}^p f_{t1}(x_{t12}), \dots, \sum_{t=1}^p f_{t1}(x_{t1T}), \sum_{t=1}^p f_{t2}(x_{t21}), \sum_{t=1}^p f_{t2}(x_{t22}), \dots, \sum_{t=1}^p f_{t2}(x_{t2T}), \dots, \sum_{t=1}^p f_{tN}(x_{tN1}), \sum_{t=1}^p f_{tN}(x_{tN2}), \dots, \sum_{t=1}^p f_{tN}(x_{tNT}) \right)^T.$$

Perbedaan optimasi PWLS pada persamaan (2.10) dan optimasi PLS pada persamaan (2.6) yaitu adanya bobot yaitu invers matriks varians-kovarians *random error*  $\Sigma^{-1}$ . Optimasi PWLS pada persamaan (2.10) menggunakan  $pN$  parameter penghalus  $\lambda_{ti}$ , sebagai pengontrol antara *goodness of fit* (ruas pertama) dan *roughness penalty* (ruas kedua).



### 2.3.3 *Spline* dalam Regresi Nonparametrik Birespon Data *Cross-section*

Jika pada sub-bab 2.3.1 memaparkan model regresi nonparametrik melibatkan hanya satu respon, maka pada sub-bab ini akan menjelaskan model yang melibatkan lebih dari satu respon yang saling dependen. Beberapa peneliti telah mengembangkan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data *cross-section*, seperti Wang dkk. (2000), dan Lestari dkk. (2010). Model regresi nonparametrik birespon yang menyatakan hubungan antara  $p$  prediktor dengan dua respon untuk data *cross-section* yang melibatkan  $N$  pengamatan/subyek sebagai berikut:

$$y_{ki} = \sum_{\ell=1}^p f_{\ell k}(x_{\ell i}) + \varepsilon_{ki}; \quad k=1,2; \quad i=1,2,\dots,N. \quad (2.11)$$

Keterangan:

$y_{ki}$  : respon ke- $k$  pada pengamatan ke- $i$ ,

$x_{\ell i}$  : prediktor ke- $\ell$  pada pengamatan ke- $i$ ,

$f_{\ell k}$  : kurva regresi hubungan prediktor ke- $\ell$  dengan respon ke- $k$ ,

$p$  : banyaknya prediktor,

$N$  : banyaknya pengamatan/subyek,

$\varepsilon_{ki}$  : *random error* pada respon ke- $k$  pada pengamatan ke- $i$ .

$\varepsilon_{ki}$  merupakan *random error* pada persamaan respon ke- $k$ , dari pengamatan ke  $i$  diasumsikan berdistribusi normal  $2N$ -variat, dengan *mean*  $E(\varepsilon)=0$  (vektor berukuran  $2N$ ) dan matriks varians-kovarians  $\text{Var}(\varepsilon)=\Sigma$  (matriks berukuran

$2N \times 2N$ ) sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{(1,1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{12}^2 & \dots & 0 & 0 & \sigma_{(2,2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{1N}^2 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{(N,N)} \\ \sigma_{(1,1)} & 0 & \dots & 0 & \sigma_{21}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{(2,2)} & \dots & 0 & 0 & \sigma_{22}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{(N,N)} & 0 & 0 & \dots & \sigma_{2N}^2 \end{bmatrix}_{(2N) \times (2N)} \quad (2.12)$$



Bentuk matriks  $\Sigma$  dapat disederhanakan menjadi sub-matriks  $\Sigma_{kk}$  untuk  $k = 1, 2$

dan  $\Sigma_{21} = \Sigma_{12}^T$ .

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}_{(2N) \times (2N)}.$$

Sub-matriks  $\Sigma_{kk}$  dan  $\Sigma_{12}$  berukuran  $N \times N$ , disajikan sebagai berikut:

$$\Sigma_{kk} = \begin{bmatrix} \sigma_{k1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{k2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{kN}^2 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad \text{dan} \quad \Sigma_{12} = \begin{bmatrix} \sigma_{(1,1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{(2,2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{(N,N)} \end{bmatrix}_{N \times N}.$$

Elemen  $\sigma_{(i,i)}$  pada sub-matriks  $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}^T$  adalah kovarians *random error* pengamatan ke- $i$  respon pertama, dan pengamatan ke- $i$  respon kedua. Kovarians ini dapat bernilai tidak 0, yang mengakomodir adanya korelasi antar respon. Di sisi lain, sub-matriks  $\Sigma_{kk}$  yaitu matriks diagonal bernilai varians tiap pengamatan pada respon ke  $k$ , dan antar pengamatan pada tiap respon adalah saling independen ditandai dengan nilai elemen selain diagonal bernilai 0.

Pendekatan *spline* secara umum menspesifikasikan  $f_{tk}$  pada persamaan

(2.11) dalam bentuk kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya, tetapi  $f_{tk}$  diasumsikan mulus (*smooth*), dalam arti termuat dalam suatu ruang fungsi tertentu, khususnya ruang *Sobolev* atau ditulis  $f_{tk} \in W_2^m[a_{tk}, b_{tk}]$  dengan:

$$W_2^m[a_{tk}, b_{tk}] = \left\{ f_{tk} : f_{tk}, f_{tk}^{(1)}, \dots, f_{tk}^{(m-1)} \text{ kontinu absolut; } \int_{a_{tk}}^{b_{tk}} [f_{tk}^{(m)}(x_{ti})]^2 dx_{ti} < \infty \right\}, \quad (2.13)$$

untuk suatu konstanta  $m$  yang menyatakan orde polinomial *spline*. Untuk mendapatkan estimasi kurva regresi  $f_{tk}$  menggunakan optimasi PWLS yaitu penyelesaian optimasi sebagai berikut (Eubank, 1999):

$$\text{Min}_{f_{tk} \in W_2^m[a_{tk}, b_{tk}], \ell=1,2, \dots, p; k=1,2} \left\{ M^{-1}(y - \tilde{f})^T \Sigma^{-1}(y - \tilde{f}) + \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^2 \lambda_{tk} \int_{a_{tk}}^{b_{tk}} (f_{tk}^{(m)}(x_{ti}))^2 dx_{ti} \right\}, \quad (2.14)$$



dengan  $\tilde{y} = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1N}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2N})^T$ , dan

$$\tilde{f} = \left( \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 1}(x_{\ell 11}), \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 1}(x_{\ell 12}), \dots, \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 1}(x_{\ell 1N}), \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 2}(x_{\ell 21}), \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 2}(x_{\ell 22}), \dots, \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 2}(x_{\ell 2N}) \right)^T.$$

Optimasi PWLS di atas mempertimbangkan  $2p$  parameter penghalus  $\lambda_{\ell k}$  sebagai pengontrol antara *goodness of fit* (ruas pertama) dan *roughness penalty* (ruas kedua).

### 2.3.4 Spline dalam Regresi Nonparametrik Birespon untuk Data Longitudinal

Model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal belum dikembangkan oleh penelitian sebelumnya, sehingga fokus utama penelitian ini adalah mengembangkan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal. Bentuk estimator ini adalah pengembangan pada model regresi nonparametrik respon tunggal untuk data longitudinal seperti yang disajikan pada persamaan (2.7), dan model regresi nonparametrik birespon untuk data *cross-section* seperti yang disajikan pada persamaan (2.11). Dengan demikian, model regresi  $p$  prediktor dengan dua respon untuk data longitudinal yang melibatkan  $N$  subyek, dan tiap subyek terdapat  $T$  pengamatan, dapat disajikan sebagai berikut:

$$y_{kit} = \sum_{\ell=1}^p f_{\ell ki}(x_{\ell it}) + \varepsilon_{kit}; \quad k=1,2; \quad i=1,2,\dots,N; \quad t=1,2,\dots,T. \quad (2.15)$$

Keterangan:

$y_{kit}$  : respon ke- $k$  pada subyek ke- $i$  dan pengamatan waktu ke- $t$ ,

$x_{\ell it}$  : prediktor ke  $\ell$  pada subyek ke- $i$  dan pengamatan waktu ke- $t$ ,

$f_{\ell ki}$  : kurva regresi hubungan prediktor ke- $\ell$  dengan respon ke- $k$  subyek ke- $i$ ,

$N$  : banyaknya subyek,

$T$  : banyaknya pengamatan setiap subyek,

$p$  : banyaknya prediktor,

$\varepsilon_{kit}$  : *random error* respon ke- $k$  pada subyek ke- $i$  dan pengamatan waktu ke- $t$ ,

Kurva regresi  $f_{\ell ki}$  tidak diketahui bentuknya dan diasumsikan termuat dalam ruang fungsi kontinyu dalam ruang *Sobolev*  $f_{\ell ki} \in W_2^m[a_{\ell ki}, b_{\ell ki}]$ .  $\varepsilon_{kit}$  merupakan *random*



*error* dari hasil pendugaan respon ke- $k$  pada subyek ke- $i$ , pengamatan ke- $t$  diasumsikan berdistribusi normal  $2NT$ -variat, dengan *mean*  $E(\varepsilon)=0$  (vektor berukuran  $2NT$ ) dan matriks varians-kovarians  $\text{Var}(\varepsilon)=\Sigma$  (matriks berukuran  $2NT \times 2NT$ ) sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11,1} & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{12,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{11,2} & \dots & 0 & 0 & \Sigma_{12,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{11,N} & 0 & 0 & \dots & \Sigma_{12,N} \\ \Sigma_{12,1} & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{22,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{12,2} & \dots & 0 & 0 & \Sigma_{22,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{12,N} & 0 & 0 & \dots & \Sigma_{22,N} \end{bmatrix}_{(2NT) \times (2NT)} \quad (2.16)$$

Sub-matriks  $\Sigma_{11,i}$ ,  $\Sigma_{22,i}$ ,  $\Sigma_{12,i}$ , dan  $0$  berukuran  $T \times T$ , disajikan sebagai berikut:

$$\Sigma_{kk,i} = \begin{bmatrix} \sigma_{kk,i(1,1)}^2 & \sigma_{kk,i(1,2)} & \dots & \sigma_{kk,i(1,T)} \\ \sigma_{kk,i(2,1)} & \sigma_{kk,i(2,2)}^2 & \dots & \sigma_{kk,i(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{kk,i(T,1)} & \sigma_{kk,i(T,2)} & \dots & \sigma_{kk,i(T,T)}^2 \end{bmatrix}_{T \times T},$$

$$\Sigma_{12,i} = \begin{bmatrix} \sigma_{12,i(1,1)} & \sigma_{12,i(1,2)} & \dots & \sigma_{12,i(1,T)} \\ \sigma_{12,i(2,1)} & \sigma_{12,i(2,2)} & \dots & \sigma_{12,i(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{12,i(T,1)} & \sigma_{12,i(T,2)} & \dots & \sigma_{12,i(T,T)} \end{bmatrix}_{T \times T},$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}.$$

Elemen dari matriks  $\Sigma$  terdiri atas 4 bagian yaitu sub-matriks bagian kiri atas dan kanan bawah berisi elemen  $\Sigma_{11,i}$ ,  $\Sigma_{22,i}$ , dan  $0$ , serta sub-matriks kanan atas dan kiri bawah adalah elemen  $\Sigma_{12,i}$ . Penjelasan keempat sub-matriks tersebut secara lengkap disajikan pada Lampiran 1, dan terurai sebagai berikut:

1. Sub-matriks bagian kiri atas dan kanan bawah menyatakan kovarians *random error* untuk respon ke- $k$  yang bernilai 0 antar pengamatan pada



subyek yang berbeda, dan bernilai  $\Sigma_{kk.i}$  antar pengamatan pada subyek yang sama.

2. Sub-matriks bagian kanan atas dan kiri bawah yaitu  $\Sigma_{12.i}$  menyatakan kovarians *random error* pada subyek ke- $i$  respon pertama dan subyek ke- $i$  respon kedua. Sub-matriks diagonal dapat bernilai tidak 0 mengakomodir adanya korelasi antara kedua respon.

### 2.3.5 Penyelesaian Optimasi *Penalized Weighted Least Square* (PWLS)

Pendekatan *spline* secara umum menspesifikasikan  $f_{\ell ki}$  pada persamaan (2.15) dalam kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya, tetapi  $f_{\ell ki}$  diasumsikan mulus (*smooth*), dalam arti termuat dalam suatu ruang fungsi tertentu, khususnya ruang *Sobolev* atau ditulis  $f_{\ell ki} \in W_2^m[a_{\ell ki}, b_{\ell ki}]$  sebagai berikut:

$$W_2^m[a_{\ell ki}, b_{\ell ki}] = \left\{ f_{\ell ki} : f_{\ell ki}, f_{\ell ki}^{(1)}, \dots, f_{\ell ki}^{(m-1)} \text{ kontinu absolut; } \int_{a_{\ell ki}}^{b_{\ell ki}} [f_{\ell ki}^{(m)}(x_{\ell it})]^2 dx_{\ell it} < \infty \right\},$$

untuk suatu konstanta  $m$  yang menyatakan orde polinomial *spline*. Optimasi PWLS ini melibatkan bobot berupa invers matriks varians-kovarians *random error* seperti yang telah dipaparkan pada persamaan (2.16). Untuk mendapatkan estimasi kurva regresi  $f_{\ell ki}$  menggunakan optimasi PWLS yaitu penyelesaian optimasi sebagai berikut (Eubank, 1999):

$$\min_{\substack{f_{\ell ki} \in W_2^m[a_{\ell ki}, b_{\ell ki}], \ell=1, 2, \dots, p; \\ k=1, 2; i=1, 2, \dots, N}} \{ M^{-1}(\underline{y} - \underline{f})^T \Sigma^{-1}(\underline{y} - \underline{f}) + \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{\ell ki} \int_{a_{\ell ki}}^{b_{\ell ki}} (f_{\ell ki}^{(m)}(x_{\ell it}))^2 dx_{\ell it} \}, \quad (2.17)$$

dengan  $\underline{y} = (y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11T}, y_{121}, y_{122}, \dots, y_{12T}, \dots, y_{2N1}, y_{2N2}, \dots, y_{2NT})^T$ , dan

$$\underline{f} = \left( \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 11}(x_{\ell 11}), \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 11}(x_{\ell 12}), \dots, \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 11}(x_{\ell 1T}), \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 12}(x_{\ell 21}), \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 12}(x_{\ell 22}), \dots, \right. \\ \left. \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 12}(x_{\ell 2T}), \dots, \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 2N}(x_{\ell N1}), \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 2N}(x_{\ell N2}), \dots, \sum_{\ell=1}^p f_{\ell 2N}(x_{\ell NT}) \right)^T.$$

Optimasi PWLS pada persamaan (2.17) selain mempertimbangkan bobot seperti yang disajikan pada persamaan (2.16), juga mempertimbangkan penggunaan  $2Np$  parameter penghalus  $\lambda_{\ell ki}$  sebagai pengontrol antara *goodness of fit* (ruas pertama)



dan *roughness penalty* (ruas kedua). Penguraian optimasi PWLS di atas menjadi *goodness of fit*  $R(f)$

$$R(f) = M^{-1}(y - \tilde{f})^T \Sigma^{-1}(y - \tilde{f}), \quad (2.18)$$

dan *roughness penalty*  $J(f)$

$$J(f) = \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{\ell ki} \int_{a_{\ell ki}}^{b_{\ell ki}} (f_{\ell ki}^{(m)}(x_{\ell ki}))^2 dx_{\ell ki}. \quad (2.19)$$

### 2.3.6 Parameter Penghalus dalam Regresi Nonparametrik

Untuk memperoleh estimator *spline* yang optimal dan kemulusan kurva sangat bergantung pada pemilihan parameter penghalus  $\lambda_{\ell ki}$  (Eubank, 1999; Budiantara, 2000). Pemilihan parameter penghalus  $\lambda_{\ell ki}$  optimal dalam regresi *spline* nonparametrik pada data longitudinal didasarkan pada metode *Generalized Cross-Validation (GCV)*. Metode *GCV* dipilih bersama pada masing-masing respon dan subyek guna mendapatkan parameter penghalus optimal.

Kemulusan kurva regresi *spline* nonparametrik bergantung pada pemilihan parameter penghalus  $\lambda_{\ell ki}$ . Pada nilai  $\lambda_{\ell ki}$  yang kecil maka kurvanya besar atau sebaliknya untuk nilai  $\lambda_{\ell ki}$  yang besar maka kurvanya akan menjadi mulus (*smooth*) (Eubank, 1999). Parameter penghalus  $\lambda_{\ell ki}$  merupakan pengontrol dalam melihat kemulusan kurva dan keseimbangan antara kesesuaian kurva terhadap data, sehingga pemilihan parameter  $\lambda_{\ell ki}$  yang optimal menjadi suatu hal yang penting, karena berkaitan dengan perolehan estimator *spline* yang optimal. Setelah mendapatkan pendugaan parameter optimal dengan meminimumkan fungsi *GCV*, akan diperoleh pendugaan kurva regresi.

### 2.3.7 Ukuran Kesesuaian Model

Model yang sesuai adalah model yang memiliki ukuran yang baik pada tahap evaluasi. Dalam penelitian ini menggunakan dua ukuran yaitu *Root of Mean Square Error (RMSE)* dan  $R^2$  atau koefisien determinasi. *RMSE* adalah ukuran yang digunakan untuk mengevaluasi model dengan cara menghitung selisih antara nilai



observasi  $y_{kit}$  dengan nilai estimasi  $\hat{f}_{kit}$  pada setiap respon, sehingga diperoleh (Greene, 2007):

$$RMSE_{y_k} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{kit} - \hat{f}_{kit})^2}{TN}}, k = 1, 2. \quad (2.20)$$

Nilai  $R^2$  atau koefisien determinasi mengukur seberapa besar rasio antara keragaman data yang mampu dijelaskan oleh model dibandingkan dengan total keragaman data atau

$$R_{y_k}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (y_{kit} - \hat{f}_{kit})^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (y_{kit} - \bar{y}_{ki})^2}, k = 1, 2. \quad (2.21)$$

Model yang paling baik/sesuai adalah model yang memiliki nilai  $RMSE_{y_1}$  dan  $RMSE_{y_2}$  terkecil serta  $R_{y_1}^2$  dan  $R_{y_2}^2$  terbesar.

Pada pengujian validasi model, dilakukan perhitungan validasi silang (*cross validation*) dengan menghilangkan satu atau dua pengamatan terakhir (*leave one or two out cross validation*). Berdasarkan hasil validasi silang diperoleh nilai *The Root of Mean Square Error of Prediction (RMSEP)* dapat dijadikan indikasi kelayakan model sebagai berikut ( $v$  menyatakan banyaknya pengamatan yang dihilangkan, dalam penelitian ini ditetapkan  $v = 1$  (*leave one out*); serta  $v = 2$  (*leave two out*)).

$$RMSEP_{y_k} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=(T-v+1)}^T (y_{kit} - \hat{f}_{kit})^2}{vN}}, k = 1, 2. \quad (2.22)$$

### 2.3.8 Uji Korelasi dan Autokorelasi

Model regresi nonparametrik *spline* birespon untuk data longitudinal yang dikembangkan pada penelitian ini mampu mengakomodir adanya (1) korelasi antar data pengamatan pada subyek yang sama, dan (2) korelasi antar respon. Pada bagian pertama adalah korelasi antar pengamatan pada subyek yang sama. Dalam pemodelan birespon disyaratkan adanya korelasi yang signifikan antar respon. Pengujian korelasi yang digunakan adalah korelasi *Pearson*, dengan formulasi



untuk korelasi antar respon pada subyek ke- $i$  untuk data longitudinal disajikan sebagai berikut:

$$r_{(y_{1i}, y_{2i})} = \frac{T \sum_{t=1}^T y_{1it} y_{2it} - \left( \sum_{t=1}^T y_{1it} \right) \left( \sum_{t=1}^T y_{2it} \right)}{\sqrt{\left( T \sum_{t=1}^T y_{1it}^2 - \left( \sum_{t=1}^T y_{1it} \right)^2 \right) \left( T \sum_{t=1}^T y_{2it}^2 - \left( \sum_{t=1}^T y_{2it} \right)^2 \right)}}, i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.23)$$

Pengujian ada tidaknya korelasi antar respon menggunakan *Pearson Correlation's Test* (Kutner, Nachtsheim, & Neter, 2004), dengan hipotesis sebagai berikut:

$$H_0 : \rho_{(y_{1i}, y_{2i})} = 0$$

$$H_1 : \rho_{(y_{1i}, y_{2i})} \neq 0$$

Statistik uji yang digunakan sebagai berikut:

$$t = \frac{r_{(y_{1i}, y_{2i})}}{s_{r_{(y_{1i}, y_{2i})}}}, \text{ dengan } s_{r_{(y_{1i}, y_{2i})}} = \sqrt{\frac{1 - r_{(y_{1i}, y_{2i})}^2}{T - 2}},$$

atau dapat ditulis kembali menjadi

$$t = \frac{r_{(y_{1i}, y_{2i})} \sqrt{T - 2}}{\sqrt{1 - r_{(y_{1i}, y_{2i})}^2}} \quad (2.24)$$

Jika nilai  $|t_{hitung}| > t_{(1-\alpha/2; T-2)}$  atau  $p\text{-value} < \alpha$ , sehingga  $H_0$  ditolak, maka dapat disimpulkan adanya korelasi antar respon.

Pada bagian kedua akan dilakukan pengujian autokorelasi, sedangkan pada bagian kedua akan dilakukan pengujian korelasi *Pearson*. Koefisien autokorelasi respon ke- $k$  dan subyek ke- $i$  pada *time lag* ke- $v$ , atau disimbolkan  $r_{y_{ki}(v)}$  disajikan sebagai berikut (Gujarati, 2004):

$$r_{y_{ki}(v)} = \frac{\sum_{t=1}^{T-v} (y_{kit} - \bar{y}_{ki})(y_{ki(t+v)} - \bar{y}_{ki})}{\sum_{t=1}^T (y_{kit} - \bar{y}_{ki})^2}, k = 1, 2, i = 1, 2, \dots, N \quad (2.25)$$

dengan  $v$  adalah indeks *time lag* dan  $N_v = T/4$ . Pengujian ada tidaknya korelasi antar pengamatan pada subyek yang sama menggunakan *Box-Pierce's Test*, dengan hipotesis sebagai berikut:



$$H_0 : \rho_{y_{ki}(1)} = \rho_{y_{ki}(2)} = \dots = \rho_{y_{ki}(N_v)} = 0$$

$$H_1 : \text{Minimal ada satu } \rho_{y_{ki}(v)} \neq 0, \text{ untuk } v = 1, 2, \dots, N_v$$

Statistik uji yang digunakan sebagai berikut:

$$Q_{y_{ki}} = T(T+2) \sum_{v=1}^{N_v} \frac{r_{y_{ki}(v)}^2}{T-v} \quad (2.26)$$

Jika nilai  $Q_{y_{ki} \text{hitung}} > \chi_{(1-\alpha; N_v)}^2$  atau  $p\text{-value} < \alpha$ , sehingga  $H_0$  ditolak, maka dapat disimpulkan adanya korelasi antar pengamatan pada subyek yang sama.

### 2.3.9 Uji Linieritas

Pada penelitian ini menekankan pemodelan regresi nonparametrik yang beranjak dari bentuk model yang tidak memenuhi asumsi linieritas atau dengan kata lain antara prediktor dengan respon memiliki bentuk hubungan yang tidak linier (Wu & Zhang, 2006). *Regression Specification Error Test* atau disingkat *RESET test* pertama kali diperkenalkan oleh Ramsey pada tahun 1969, dengan prosedur uji sebagai berikut (Gujarati, 2004):

(i) Persamaan regresi pertama sebagai berikut

$$y_{kit} = \beta_0 + \beta_1 x_{1it} + \beta_2 x_{2it} + \dots + \beta_p x_{pit} + \varepsilon_{kit} \quad (2.27)$$

diestimasi menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS), kemudian dihitung

$$\hat{y}_{kit} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1it} + \hat{\beta}_2 x_{2it} + \dots + \hat{\beta}_p x_{pit},$$

$$R_1^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{kit} - \hat{y}_{kit})^2}{\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{kit} - \bar{y}_{kit})^2}.$$

(ii) Persamaan regresi kedua sebagai berikut

$$y_{kit} = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1it} + \alpha_2 x_{2it} + \dots + \alpha_p x_{pit} + \alpha_{p+1} \hat{y}_{kit}^2 + \alpha_{p+2} \hat{y}_{kit}^3 + \varepsilon_{kit} \quad (2.28)$$

diestimasi menggunakan metode OLS, kemudian dihitung

$$\hat{y}_{kit}^* = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{1it} + \hat{\alpha}_2 x_{2it} + \dots + \hat{\alpha}_p x_{pit} + \hat{\alpha}_{p+1} \hat{y}_{kit}^2 + \hat{\alpha}_{p+2} \hat{y}_{kit}^3$$



$$R_2^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{kit} - \hat{y}_{kit}^*)^2}{\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{kit} - \bar{y}_{ki})^2}.$$

(iii) Pengujian apakah hubungan antara  $x_{lit}$  terhadap  $y_{kit}$  dalam bentuk linier atau non-linier, dengan hipotesis sebagai berikut:

$$H_0 : \alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = 0$$

$$H_1 : \text{Minimal ada satu } \alpha_j \neq 0, \quad j = p+1, p+2$$

Statistik uji yang digunakan sebagai berikut:

$$F = \frac{(R_2^2 - R_1^2) / 2}{(1 - R_2^2) / (NT - (p+2))}. \quad (2.29)$$

Jika  $F_{hitung} > F_{(1-\alpha; 2; T-(p+2))}$  atau  $p\text{-value} < \alpha$ , sehingga  $H_0$  ditolak, maka bentuk hubungan antara  $x_{lit}$  terhadap  $y_{kit}$  adalah non-linier.

## 2.4 Penyakit TB Paru

Aplikasi regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal dalam penelitian ini menggunakan data pasien penyakit TB Paru. Pada bagian berikut akan disajikan perkembangan penyakit TB Paru, Diagnosis TB Paru, dan pengobatan TB Paru.

### 2.4.1 Perkembangan Penyakit TB Paru

Tuberkulosis (TB) merupakan masalah kesehatan masyarakat yang penting di dunia ini. Pada tahun 1992, WHO telah mencanangkan tuberkulosis sebagai *Global Emergency* (PDPI, 2006). Tabel 2.1 menjelaskan jumlah kasus TB dan kematian akibat penyakit TB jika dibandingkan populasi dari seluruh penduduk dunia. WHO Report tahun 2014 menyatakan bahwa terdapat 6,117 juta penderita penyakit TB atau 0,09% dari keseluruhan penduduk seluruh dunia. Persentase penderita TB terbanyak ada di kawasan Afrika yaitu 0,15% dari seluruh penduduk, diikuti oleh Asia Tenggara yaitu 0,12% dari seluruh penduduk. Dari total penderita TB, sebanyak 1,132 juta di antaranya mengakibatkan kematian, atau tingkat kematian penderita TB sebesar 18,51%. Kawasan Mediteranian Timur memiliki



tingkat kematian tertinggi yaitu 31,21%, diikuti oleh Afrika sebesar 27,58% dan Asia Tenggara sebesar 19,16%.

**Tabel 2.1:** Jumlah Kasus TB dan Angka Kematian Hingga Tahun 2014

Wilayah	Penduduk <sup>a</sup> (ribu orang)	Penderita TB <sup>b</sup> (ribu orang)	Rasio b/a	Kematian TB <sup>c</sup> (ribu orang)	Rasio c/b
Afrika	927.371	1.414	0,15	39,0	2,76
Amerika	970.821	231	0,02	1,4	0,61
Mediteranian Timur	616.906	449	0,07	14,0	3,12
Eropa	907.053	350	0,04	3,8	1,09
Asia Tenggara	1.855.068	2.297	0,12	44,0	1,92
Pasifik Barat	1.858.410	1.376	0,07	11,0	0,80
Keseluruhan	7.135.629	6.117		113,2	

Sumber: WHO Report (2014)

Dalam laporan lebih lanjut, WHO menetapkan Indonesia sebagai salah satu di antara 22 negara dengan resiko penyakit TB tertinggi di dunia atau *High Burden Country* (HBC), seperti tertera pada Tabel 2.2. Sebesar 80,2% atau 4,908 juta dari total 6,117 juta penderita TB seluruh dunia terdapat di 22 negara HBC di atas.

Indonesia berada pada peringkat 4, dengan penderita sebanyak 329.000 atau 0,13% dari keseluruhan penduduk. Sebanyak 6.400 penderita TB di Indonesia berakhir dengan kematian atau tingkat mortalitas akibat penyakit TB sebesar 1,96%.

Tingkat mortalitas tersebut berada pada peringkat ke 8 tertinggi di antara negara-negara HBC. Di Indonesia tuberkulosis adalah pembunuh nomor satu diantara penyakit menular dan merupakan penyebab kematian nomor tiga setelah penyakit jantung dan penyakit pernapasan akut pada seluruh kalangan usia.

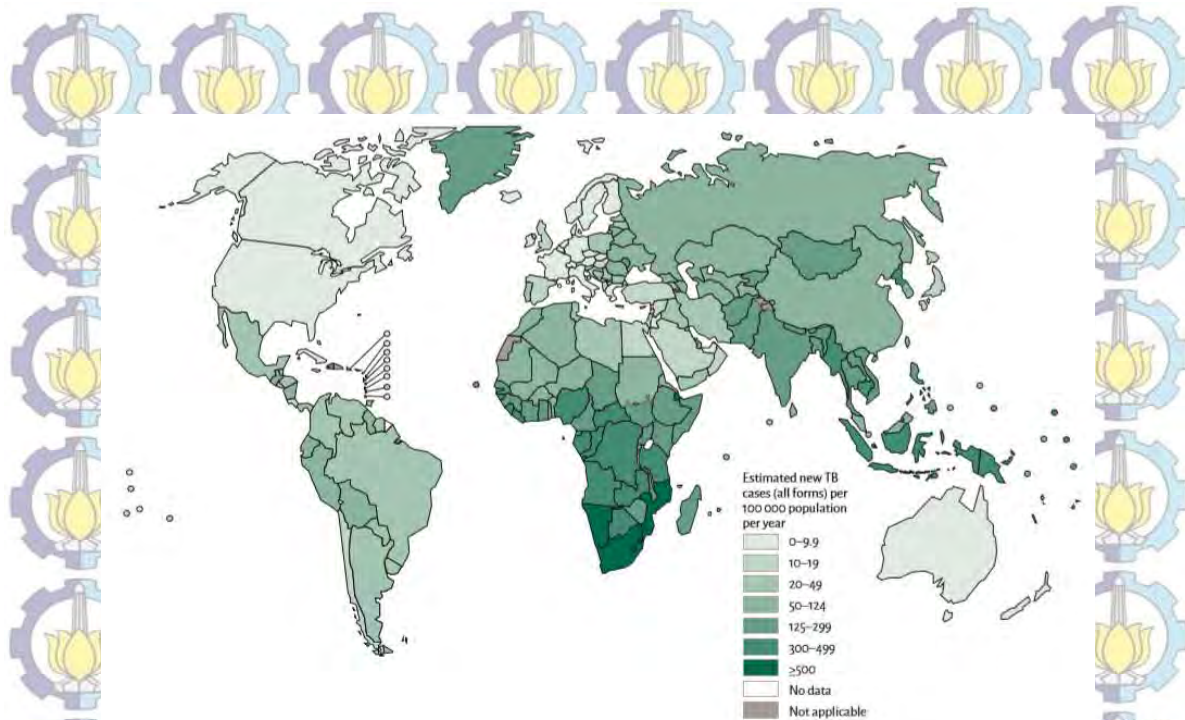


**Tabel 2.2: Jumlah Kasus TB dan Angka Kematian pada Kelompok HBC**

No	Negara	Penduduk <sup>a</sup> (ribu orang)	Penderita TB <sup>b</sup> (ribu orang)	Rasio b/a	Kematian TB <sup>c</sup> (ribu orang)	Rasio c/b
1	India	1.252.140	1.416	0,11	24,00	1,70
2	China	1.385.567	855	0,06	4,10	0,48
3	Afsl	52.776	329	0,62	2,50	0,76
4	Indonesia	249.866	327	0,13	6,40	1,96
5	Pakistan	182.143	298	0,16	10,00	3,35
6	Philipina	98.394	244	0,25	2,70	1,10
7	Bangladesh	156.595	191	0,12	8,00	4,19
8	Rusia	142.834	143	0,10	1,70	1,19
9	Myanmar	53.259	142	0,27	2,60	1,83
10	Ethiopia	94.101	132	0,14	3,00	2,28
11	DR Congo	67.514	114	0,17	4,60	4,05
12	Vietnam	91.680	102	0,11	1,70	1,66
13	Nigeria	173.615	100	0,06	1,60	1,59
14	Kenya	44.354	90	0,20	0,91	1,01
15	Brazil	200.362	83	0,04	0,44	0,53
16	Thailand	67.011	66	0,10	0,81	1,22
17	Tanzania	49.253	66	0,13	0,60	0,91
18	Mozambik	25.834	56	0,22	1,80	3,20
19	Uganda	37.579	48	0,13	0,41	0,86
20	Cambodia	15.135	39	0,26	1,00	2,56
21	Zimbabwe	14.150	35	0,25	0,57	1,62
22	Afghanistan	30.552	32	0,10	1,30	4,11
	Keseluruhan	4.484.714	4.908		80,74	

Jumlah penderita baru TB Paru tiap 100.000 populasi berbagai negara disajikan pada Lampiran 3 dan Gambar 2.1. Indonesia termasuk dalam kelompok penderita antara 300-499 atau tepatnya 399 pasien baru TB Paru tiap 100.000 populasi. Indoneia berada di peringkat ketiga setelah Afrika Selatan (834 pasien baru), dan Mozambik (551 pasien baru). Peringkat keempat dan kelima adalah Kamboja (390 pasien baru), dan Myanmar (369 pasien baru).





**Gambar 2.1.** Jumlah Penderita Baru TB Paru Tahun 2014

Penyakit TB paru merupakan penyakit menular langsung yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis* dan merupakan penyakit infeksi kronis menular yang menjadi masalah kesehatan dan perhatian dunia. Kuman TB tumbuh secara obligat aerob. Energi diperoleh dari oksidasi senyawa karbon yang sederhana.  $\text{CO}_2$  dapat merangsang pertumbuhan, dan bakteri ini dapat tumbuh dengan suhu  $30\text{--}40^\circ\text{C}$  dan suhu optimum  $37\text{--}38^\circ\text{C}$ . Selanjutnya bakteri tersebut akan mati pada suhu  $60^\circ\text{C}$  selama 15-20 menit. Pengurangan oksigen dapat menurunkan metabolisme kuman. Kuman TB berbentuk batang dengan ukuran  $2\text{--}4\ \mu\text{x}\ 0,2\text{--}0,5\ \mu\text{m}$ , dengan bentuk *uniform*, tidak berspora dan tidak bersimpai. Dinding sel mengandung lipid sehingga memerlukan pewarnaan khusus agar dapat terjadi penetrasi zat warna, dengan penggunaan pengecatan *Ziehl-Nielsen*. Kandungan lipid pada dinding sel menyebabkan kuman TB sangat tahan terhadap asam basa dan tahan terhadap kerja bakterisidal antibiotika.

*Mycobacterium tuberculosis* mengandung beberapa antigen dan determinan antigenik yang dimiliki mikobakterium lain sehingga dapat menimbulkan reaksi silang. Sebagian besar antigen kuman terdapat pada dinding sel yang dapat menimbulkan reaksi hipersensitivitas tipe lambat (Astuti, 2008). Ada beberapa hal



yang menjadi penyebab semakin meningkatnya penyakit TB paru di dunia antara lain karena kemiskinan, meningkatnya penduduk dunia, perlindungan kesehatan yang tidak mencukupi, kurangnya biaya untuk berobat, dan epidemi HIV terutama di Afrika dan Asia. Asia Tenggara menanggung bagian yang terberat dari beban TB paru global yakni sekitar 37,5% dari kasus TB dunia. Bakteri ini menyerang sebagian besar perempuan usia produktif (15-50). Penyebab kematian perempuan akibat TB paru lebih banyak dari pada akibat kehamilan, persalinan dan nifas (Chozin, 2012).

Penyakit TB paru dapat menular lewat percikan dahak yang keluar saat batuk, bersin atau berbicara karena penularannya melalui udara yang terhirup saat bernapas. Diperkirakan, satu orang menderita TB paru BTA positif yang tidak diobati akan menulari 10-15 orang setiap tahunnya. Penyakit TB paru erat kaitannya dengan sanitasi lingkungan rumah. Sanitasi lingkungan rumah sangat mempengaruhi keberadaan bakteri *Mycobacterium tuberculosis*, dimana bakteri *Mycobacterium tuberculosis* dapat hidup selama 1-2 jam bahkan sampai beberapa hari hingga berminggu-minggu tergantung ada tidaknya sinar matahari, ventilasi, kelembaban, suhu, lantai dan kepadatan penghuni rumah (Astuti, 2008).

#### **2.4.2 Diagnosis TB Paru**

TB paru sering menimbulkan gejala klinis yang dapat dibagi menjadi dua yaitu gejala respiratorik dan gejala sistemik. Gejala respiratorik seperti batuk, batuk darah, sesak napas, nyeri dada, sedangkan gejala sistemik seperti demam, keringat malam, anoreksia, penurunan berat badan dan *malaise*. Gejala respiratorik ini sangat bervariasi, dari mulai tidak ada gejala sampai gejala yang cukup berat tergantung dari luasnya lesi. Bila bronkus belum terlibat dalam proses penyakit, dimungkinkan pasien tidak ada gejala batuk. Batuk yang pertama terjadi akibat adanya iritasi bronkus, dan selanjutnya batuk diperlukan untuk membuang dahak keluar (Astuti, 2008).

Pada awal perkembangan penyakit sangat sulit menemukan kelainan pada pemeriksaan fisik. Kelainan yang dijumpai tergantung dari organ yang terlibat. Kelainan paru pada umumnya terletak di daerah *lobus superior* terutama di daerah



*apeks* dan *segmen posterior*. Pada pemeriksaan fisik dapat dijumpai antara lain suara napas bronkial, amforik, suara napas melemah, ronki basah, tanda-tanda penarikan paru, diafragma dan mediastinum. Untuk yang diduga menderita TB paru, diperiksa 3 spesimen dahak dalam waktu 2 hari yaitu di pagi hari (SPS). Berdasarkan panduan program TB nasional, diagnosis TB paru pada orang dewasa dimulai dengan pengujian keberadaan kuman TB (BTA). Pemeriksaan lanjutan seperti foto toraks, biakan dan uji kepekaan dapat digunakan sebagai penunjang diagnosis sesuai dengan indikasinya (Chozin, 2012).

Dalam kaitannya dengan upaya *monitoring* terhadap pengobatan, pada lima tahun terakhir ditemukan penanda biologis (*biology marker*) yang disebut dengan uPAR atau *urokinase plasminogen activator receptor*. uPAR merupakan komponen inti dari *plasminogen activation system*, sebagai *receptor* seluler untuk *serine protease urokinase plasminogen activator* (uPA). uPAR dapat dipecah dan dilepaskan dari permukaan sel oleh beberapa *protease*, seperti *chymotrypsis*, *phospholipases* dan uPA menjadi bentuk terlarut (*soluble*) yang disebut suPAR yaitu *soluble urokinase plasminogen activator receptor* (Minji dkk., 2003). Oelsen dkk. (2002) menyebutkan bahwa kadar suPAR dapat dijadikan sebagai alat prognostik pada penderita TB paru maupun HIV.

Penanda biologis lainnya pada perkembangan penyakit TB paru adalah jumlah monosit. Monosit atau makrofag mencakup 2-8% dari leukosit atau sel darah putih. Sel ini melawan infeksi dengan ‘memakan’ kuman dan memberi tahu sistem kekebalan tubuh mengenai kuman apa yang ditemukan. Monosit beredar dalam darah. Monosit yang berada di berbagai jaringan tubuh disebut makrofag. Jumlah monosit yang tinggi umumnya menunjukkan adanya infeksi bakteri.

#### **2.4.3 Pengobatan TB Paru**

Pengobatan TB paru bertujuan untuk menyembuhkan pasien, mencegah kematian, mencegah kekambuhan, memutuskan rantai penularan dan mencegah terjadinya resistensi kuman terhadap Obat Anti Tuberkulosis (OAT). Pengobatan TB paru dilakukan dengan prinsip - prinsip sebagai berikut:

1. OAT harus diberikan dalam bentuk kombinasi beberapa jenis obat, dalam jumlah cukup dan dosis tepat sesuai dengan kategori pengobatan, dan tidak



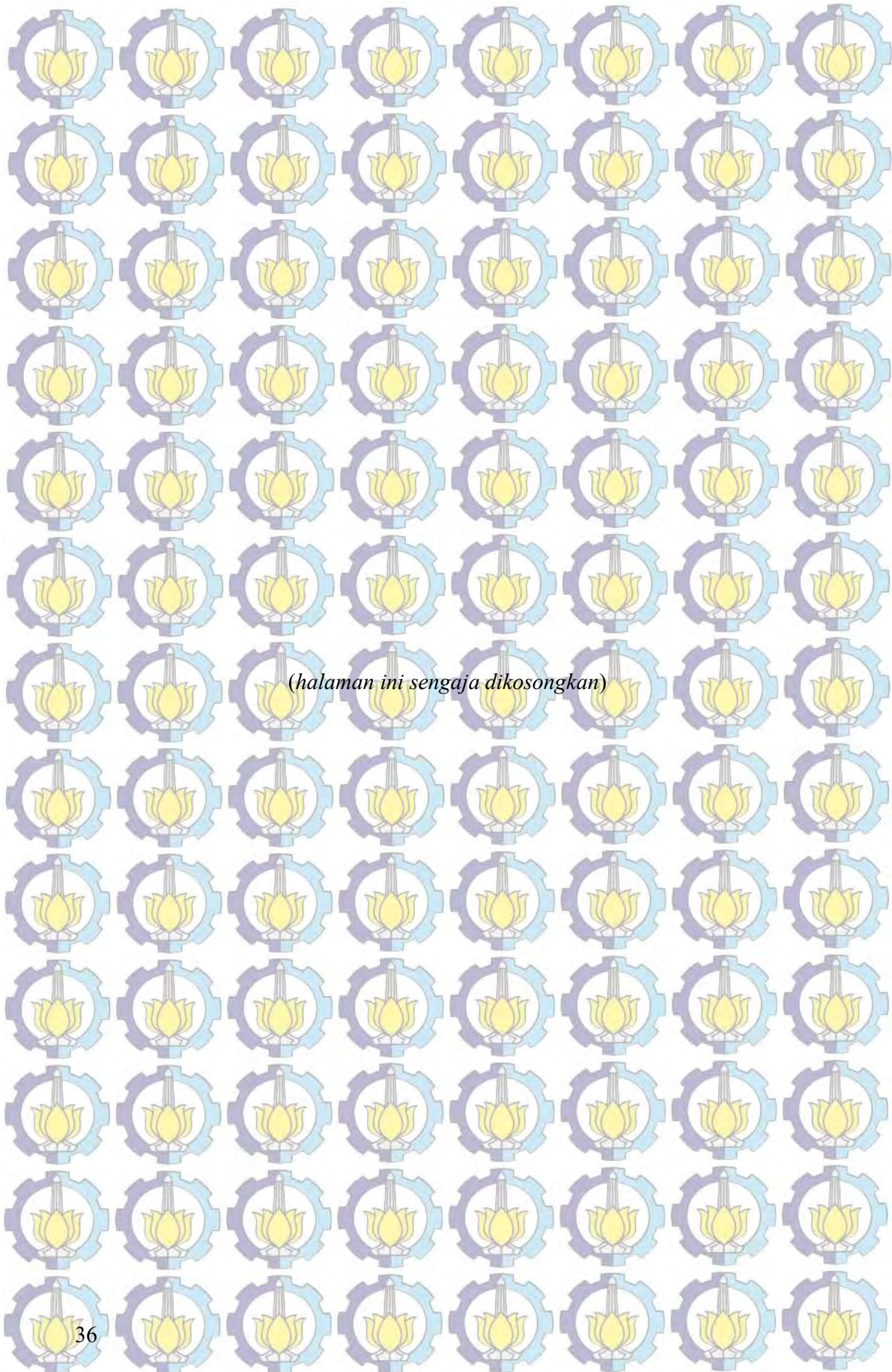
menggunakan OAT tunggal (monoterapi). Pemakaian OAT-Kombinasi Dosis Tetap (OAT-KDT) lebih menguntungkan dan sangat dianjurkan dalam pengobatan TB paru.

2. Untuk menjamin kepatuhan pasien menelan obat, dilakukan pengawasan langsung (DOT = *Directly Observed Treatment*) oleh seorang Pengawas Menelan Obat (PMO).
3. Pengobatan TB paru diberikan dalam 2 tahap, yaitu tahap intensif dan tahap lanjutan. Tahap intensif dilakukan pada 6 bulan pertama, sedangkan tahap lanjutan dilakukan setelah 6 bulan pertama jika pasien belum sembuh dari penyakit TB paru.

Evaluasi pasien meliputi evaluasi klinis, bakteriologis, radiologis sebagai berikut.

1. Evaluasi Klinis. Pasien dievaluasi setiap 2 minggu pada selang 6 bulan pengobatan. Evaluasi klinis meliputi keluhan, berat badan dan pemeriksaan fisik. Keluhan panas berkepanjangan kemungkinan terjadi pada kategori *KP Miller* atau TB dengan lesi tertinggi, yang biasanya mereda dalam 3-4 minggu. Peneliti sebelumnya, yaitu Barnes & Wize (2000) dalam studinya mengatakan bahwa dengan pemberian OAT maka panas mengalami resolusi dalam minggu pertama 89% dan setelah 2 minggu mencapai 93%. Sedangkan untuk keluhan batuk, frekuensinya akan mengalami penurunan pada akhir minggu kedua (Rom & Garay, 2004).
2. Evaluasi bakteriologis. Tujuan pemeriksaan bakteriologi adalah untuk mendeteksi ada tidaknya konversi dahak. Pemeriksaan dan evaluasi mikroskopis dilakukan sebelum pengobatan, setelah 2 bulan pengobatan (setelah fase intensif) dan pada akhir pengobatan. Bila ada fasilitas biakan, dilakukan pemeriksaan biakan dan uji resistensi. Konversi pengecatan sputum penderita terjadi 75% sampai 85% kasus setelah terapi selama 2 bulan dan 96% setelah terapi selama 6 bulan (PDPI, 2006; Rom & Garay, 2004).
3. Evaluasi Radiologis. Pemeriksaan dan evaluasi foto toraks dilakukan pada Sebelum mulai pengobatan, Setelah 2 bulan pengobatan (kecuali pada kasus dengan kemungkinan keganasan, maka evaluasi foto toraks dapat dilakukan 1 bulan setelah pengobatan), dan pada akhir pengobatan (Chozin, 2012).







## BAB 3

### METODOLOGI PENELITIAN

#### 3.1 Data Penelitian

Ada dua kajian utama yang akan dilakukan pada penelitian ini, yaitu kajian teoritik dan kajian terapan. Kajian teoritik difokuskan pada pengembangan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal, dan pengembangan pemilihan parameter penghalus optimal untuk estimator *spline*. Kajian terapan digunakan dengan mengaplikasikan model regresi nonparametrik birespon pada data pasien penderita TB paru dan data simulasi. Tabel 3.1 menyajikan struktur data longitudinal yang melibatkan dua respon dengan  $p$  prediktor.

**Tabel 3.1:** Struktur data longitudinal yang melibatkan dua respon dengan  $p$  prediktor

Subyek ( $i$ )	Waktu Pengamatan ( $t$ )	Respon ( $y$ )		Prediktor ( $x$ )			
		$y_{1it}$	$y_{2it}$	$x_{1it}$	$x_{2it}$	...	$x_{pit}$
1	1	$y_{111}$	$y_{211}$	$x_{111}$	$x_{211}$	$\vdots$	$x_{p11}$
	2	$y_{112}$	$y_{212}$	$x_{112}$	$x_{212}$	$\vdots$	$x_{p12}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$T$	$y_{11T}$	$y_{21T}$	$x_{11T}$	$x_{21T}$	$\vdots$	$x_{p1T}$
2	1	$y_{121}$	$y_{221}$	$x_{121}$	$x_{221}$	$\vdots$	$x_{p21}$
	2	$y_{122}$	$y_{222}$	$x_{122}$	$x_{222}$	$\vdots$	$x_{p22}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$T$	$y_{12T}$	$y_{22T}$	$x_{12T}$	$x_{22T}$	$\vdots$	$x_{p2T}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N$	1	$y_{1N1}$	$y_{2N1}$	$x_{1N1}$	$x_{2N1}$	$\vdots$	$x_{pN1}$
	2	$y_{1N2}$	$y_{2N2}$	$x_{1N2}$	$x_{2N2}$	$\vdots$	$x_{pN2}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$T$	$y_{1NT}$	$y_{2NT}$	$x_{1NT}$	$x_{2NT}$	$\vdots$	$x_{pNT}$



Data riil pada penelitian ini menggunakan data Chozin (2012) tentang pasien penderita TB paru tahun 2011. Pada data tersebut, terdiri atas 13 pasien, akan tetapi penelitian ini hanya melibatkan  $N = 4$  pasien yang memenuhi persyaratan sebagai berikut

1. Data lengkap (seimbang), artinya pasien tersebut kontrol rutin sepanjang 13 periode pengamatan,
2. Pasien penderita TB baru (bukan kambuhan),
3. Pasien mengikuti terapi OAT (obat anti tuberkulosis),
4. Pasien berusia antara 25-50 tahun.

Keempat pasien tersebut mewakili gambaran radiologi foto *thorax* (stadium) yaitu *minimal lession*, *mod advance*, *far advance*, dan *KP miller*. Respon yang diamati adalah kadar suPAR ( $y_1$ ), dan jumlah monosit ( $y_2$ ) pada beberapa periode amatan tiap dua minggu sekali selama 6 bulan pengobatan ( $T=13$ ). Prediktor yang digunakan adalah waktu pengamatan ( $x_1$ ), indeks masa tubuh ( $x_2$ ), dan laju endap darah ( $x_3$ ). Definisi operasional variabel yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a) Respon pertama yaitu kadar suPAR ( $y_1$ ) adalah kadar *soluble* (terlarut) *urokinase plasminogen activator receptor* yang dijadikan sebagai alat *monitoring* pada pengobatan pasien TB paru. Satuan kadar suPAR adalah  $\mu\text{L}$ .
- b) Respon kedua yaitu jumlah monosit ( $y_2$ ) adalah jumlah monosit yang beredar dalam sel darah putih. Satuan jumlah monosit adalah  $10^3/\mu\text{L}$ .
- c) Prediktor pertama yaitu waktu pengamatan ( $x_1$ ) sebagai *design time point* adalah besaran waktu yang dijadikan pengukur pengamatan tiap pasien. Satuan waktu pengamatan adalah minggu.
- d) Prediktor kedua yaitu indeks masa tubuh ( $x_2$ ) adalah rasio antara berat badan dan tinggi kuadrat pasien yang diamati sebagai subyek penelitian. Satuan rasio antara berat badan dan tinggi kuadrat pasien adalah  $\text{kg}/\text{m}^2$ .



- e) Prediktor ketiga yaitu laju endapan darah ( $x_3$ ) adalah tingkat kecepatan endapan darah yang dialami pasien selama pengobatan. Satuan laju endapan darah adalah mm/jam.

### 3.2. Metode Penelitian

Dalam subbab ini dibahas langkah-langkah untuk mencapai tujuan penelitian sebagai berikut.

#### 3.2.1. Estimasi Kurva Regresi Nonparametrik Birespon untuk Data Longitudinal

Tujuan 1 penelitian ini adalah mendapatkan bentuk estimator *spline* dan pemilihan parameter penghalus optimal untuk mengestimasi kurva regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal. Adapun langkah-langkah untuk mencapai tujuan 1 adalah sebagai berikut:

1. Menentukan model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal seperti disajikan pada persamaan (2.15), dengan asumsi *random error*  $\varepsilon_{kit}$  diasumsikan berdistribusi normal  $M$ -variat (dengan  $M = 2NT$ ), dengan *mean*  $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$  (vektor berukuran  $M$ ) dan matriks varians-kovarians  $\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Sigma}$  (matriks berukuran  $M \times M$ ) seperti disajikan pada persamaan (2.16).
2. Mendapatkan bentuk fungsi regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal  $\tilde{f} = \mathbf{T}\tilde{d} + \mathbf{V}\tilde{c}$  dan menentukan matriks desain  $\mathbf{T}$  serta  $\mathbf{V}$ , dengan pendekatan RKHS sebagai berikut:
  - a. Menetapkan basis untuk ruang  $\mathcal{H}_0$  dan ruang  $\mathcal{H}_1$ , dengan  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1^\perp$ , serta  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ .
  - b. Menjabarkan  $\mathcal{L}_x$  sebagai fungsional linier terbatas pada ruang  $\mathcal{H}$  dan fungsi regresi  $f_{ki} \in \mathcal{H}$ .
  - c. Menyelesaikan persamaan  $\mathcal{L}_x f_{ki} = \langle \eta_{kit}, f_{ki} \rangle$ , sehingga diperoleh  $\tilde{f}_{ki}$ .



3. Mendapatkan estimator *spline* regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal yang meminimumkan PWLS seperti disajikan pada persamaan (2.17), sebagai berikut:

a. Membentuk optimasi PWLS seperti yang disajikan pada persamaan (2.17).

b. Menjabarkan *norm* untuk setiap  $f_{kti} \in W_2^m[a_{kti}, b_{kti}]$ .

c. Menjabarkan penguraian optimasi PLWS bagian pertama yaitu *goodness of fit*  $J(f)$  seperti yang disajikan pada persamaan (2.18).

d. Menjabarkan penguraian optimasi PLWS bagian kedua yaitu *roughness penalty*  $R(f)$  seperti yang disajikan pada persamaan (2.19).

e. Mendapatkan fungsi optimasi  $Q(\zeta, d)$ , yang diperoleh dari hasil penggabungan penguraian optimasi PWLS bagian pertama dan kedua.

f. Menyelesaikan optimasi minimum  $Q(\zeta, d)$  dengan cara melakukan turunan parsial  $Q(\zeta, d)$  berturut-turut terhadap  $\zeta$  dan  $d$ , sehingga diperoleh  $\hat{\zeta}$  dan  $\hat{d}$ .

4. Mendapatkan estimasi matriks varians-kovarians *error*  $\Sigma$  untuk model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal sebagai berikut:

a. Mendapatkan fungsi *likelihood*  $L(\tilde{f}, \Sigma | \tilde{y})$  dengan  $\tilde{y}$  sebagai sampel *random* yang diambil dari populasi berdistribusi normal  $M$ -variat ( $M=2NT$ ) dengan  $E(\varepsilon) = 0$  dan  $\text{Var}(\varepsilon) = \Sigma$  seperti yang disajikan pada Persamaan (2.16).

b. Menyelesaikan optimasi fungsi *likelihood* yang diperoleh yaitu  $\max [L(\tilde{f}, \Sigma | \tilde{y})]$ , sehingga diperoleh estimasi matriks  $\hat{\Sigma}$ .

5. Menyelesaikan pemilihan parameter penghalus optimal untuk model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal sebagai berikut:

a. Menguraikan  $R(f)$  yaitu *goodness of fit* PWLS seperti yang diperoleh pada langkah 3(c).



- b. Mendapatkan bentuk fungsi  $G(\lambda; \Sigma)$  dari  $R(f)$  yang diperoleh pada bagian sebelumnya.
- c. Menyelesaikan optimasi fungsi  $G(\lambda; \Sigma)$  yaitu  $\min[G(\lambda; \Sigma)]$ , sehingga diperoleh  $\lambda_{opt}$ .

### 3.2.2. Aplikasi Estimator *Spline* Birespon pada Data Simulasi

Tujuan 2 penelitian ini adalah mengaplikasikan model regresi nonparametrik birespon *spline* pada data simulasi. Setiap percobaan simulasi (variasi ukuran pengamatan & fungsi percobaan, serta variasi nilai korelasi) dilakukan 10 perulangan. Adapun langkah-langkah untuk mencapai tujuan 2 adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan gambaran tentang kemampuan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal pada berbagai tingkat orde polinomial *spline* ( $m$ ), sebagai berikut:
  - a. Menetapkan model regresi nonparametrik birespon dengan dua prediktor dengan  $N=3$  (tiga) subyek, dan  $T=10, 20, 50$ , dan 100 pengamatan seperti disajikan pada persamaan berikut:
 
$$y_{kit} = \sum_{k=1}^2 f_{ki}(x_{tit}) + \varepsilon_{kit}, \text{ dengan } k=1,2; i=1,2,3; t=1,2,\dots,T.$$
  - b. Menetapkan variasi orde polinomial *spline*  $m = 2; 3; 4; 5$ .
  - c. Menetapkan nilai  $x_{tit}, t=1,2,\dots,T$  dengan  $x_{tit} \in [0,1]$  adalah *design time point* ditetapkan  $x_{tit} = \frac{2t-1}{2T}$ . Menetapkan nilai  $x_{2it}, t=1,2,\dots,T$  dibangkitkan dari sebaran  $U(0,1)$ .
  - d. Membangkitkan *random error*  $\varepsilon$  berdistribusi  $M$ -variat ( $M=2NT$ ) dengan  $E(\varepsilon)=0$  dan  $\text{Var}(\varepsilon)=\Sigma$  sebagai berikut:



$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11.1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \Sigma_{12.1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{11.2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Sigma_{12.2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Sigma_{11.N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Sigma_{12.N} \\ \Sigma_{12.1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \Sigma_{22.1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{12.2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Sigma_{22.2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Sigma_{12.N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Sigma_{22.N} \end{bmatrix},$$

dengan

$$\Sigma_{kk.i} = \begin{bmatrix} \sigma_{kk.i(1)}^2 & \sigma_{kk.i(1,2)} & \cdots & \sigma_{kk.i(1,T)} \\ \sigma_{kk.i(2,1)} & \sigma_{kk.i(2)}^2 & \cdots & \sigma_{kk.i(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{kk.i(T,1)} & \sigma_{kk.i(T,2)} & \cdots & \sigma_{kk.i(T)}^2 \end{bmatrix}_{T \times T},$$

$$\Sigma_{12.i} = \begin{bmatrix} \sigma_{12.i(1,1)} & \sigma_{12.i(1,2)} & \cdots & \sigma_{12.i(1,T)} \\ \sigma_{12.i(2,1)} & \sigma_{12.i(2,2)} & \cdots & \sigma_{12.i(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{12.i(T,1)} & \sigma_{12.i(T,2)} & \cdots & \sigma_{12.i(T,T)} \end{bmatrix}_{T \times T}.$$

$\sigma_{ki(t)}^2$  adalah varians *error* pada subyek ke-*i*, respon ke-*k* diasumsikan homogen ( $\sigma_{ki(1)}^2 = \sigma_{ki(2)}^2 = \dots = \sigma_{ki(T)}^2 = \sigma_{ki}^2$ ), dan menetapkan masing-masing nilai varians *error* berbeda sebagai berikut:

$$\sigma_{11}^2 = 7,5; \sigma_{12}^2 = 7,7; \sigma_{13}^2 = 7,6; \sigma_{21}^2 = 7,4; \sigma_{22}^2 = 7,6; \sigma_{23}^2 = 7,8.$$

Nilai  $\sigma_{12.i(t,s)} = \sigma_{12.i}, t=1,2,\dots,T; s=1,2,\dots,T$  dan  $\rho_i = \frac{\sigma_{12.i}}{\sqrt{\sigma_{11.i}^2 \sigma_{22.i}^2}}$  masing-

masing adalah kovarians dan korelasi *error* antar tiap subyek dan tiap respon. Nilai korelasi ditetapkan  $\rho_i = 0,5$ .

e. Mendapatkan kurva regresi  $f_{tki}$  dari tiga kelompok fungsi berikut:

Fungsi Eksponensial:  $f_{tki}(x_{ti}) = a_1(e^{a_2 x_{ti}} - 4e^{a_3 x_{ti}} + 3e^{a_4 x_{ti}}).$

Fungsi Trigonometri:  $f_{tki}(x_{ti}) = \sin^{b_1}(2\pi x_{ti}^{b_2}).$

Fungsi Polinomial:  $f_{tki}(x_{ti}) = c_1(x_{ti} - c_2)(c_3 + x_{ti})^2.$



Koefisien fungsi percobaan ditetapkan seperti Tabel 3.2

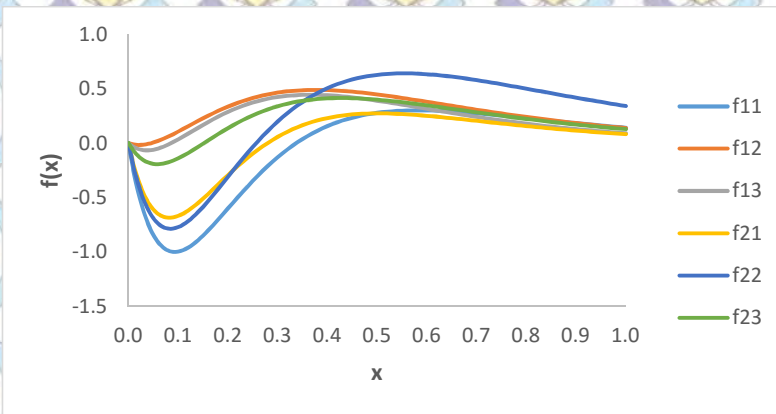
**Tabel 3.2:** Koefisien Fungsi Eksponensial, Trigonometri, Polinomial

Koefisien	$f_{\ell 11}$	$f_{\ell 12}$	$f_{\ell 13}$	$f_{\ell 21}$	$f_{\ell 22}$	$f_{\ell 23}$
Fungsi Eksponensial						
$a_1$	4,26	3,69	5,05	5,12	4,48	3,31
$a_2$	-3,25	-3,20	-3,92	-3,99	-2,48	-3,19
$a_3$	-6,50	-6,85	-7,34	-7,26	-6,20	-7,15
$a_4$	-9,75	-8,22	-8,75	-9,73	-9,17	-9,27
Fungsi Trigonometri						
$b_1$	1	2	3	2	1	2
$b_2$	3	3	3	1	2	2
$b_3$	1	2	3	2	1	2
Fungsi Polinomial						
$c_1$	4,0	3,0	1,5	3,5	4,5	2,5
$c_2$	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0
$c_3$	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

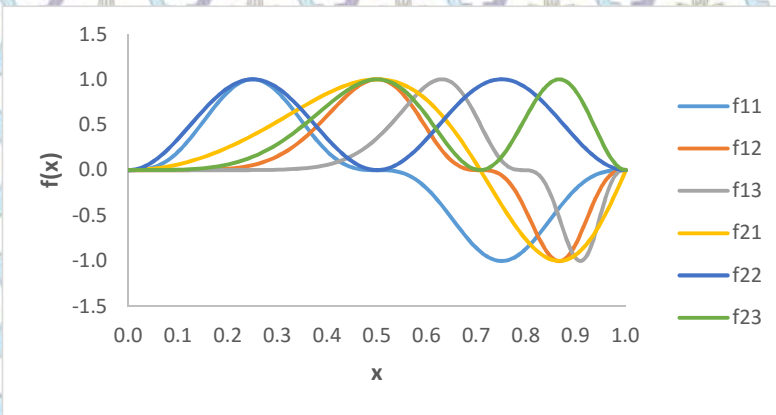
Rancangan simulasi menggunakan 6 kelompok fungsi sebagai berikut:

- Kelompok fungsi EE (Eksponensial-Eksponensial), yaitu kurva regresi dibangkitkan dari fungsi Eksponensial untuk  $x_{1i}$  dan  $x_{2i}$ .
- Kelompok fungsi TT (Trigonometri-Trigonometri), yaitu kurva regresi dibangkitkan dari fungsi Trigonometri untuk  $x_{1i}$  dan  $x_{2i}$ .
- Kelompok fungsi PP (Polinomial-Polinomial), yaitu kurva regresi dibangkitkan dari fungsi Polinomial untuk  $x_{1i}$  dan  $x_{2i}$ .
- Kelompok fungsi ET (Eksponensial-Trigonometri), yaitu kurva regresi dibangkitkan dari fungsi Eksponensial untuk  $x_{1i}$  dan Trigonometri untuk  $x_{2i}$ .
- Kelompok fungsi EP (Eksponensial-Polinomial), yaitu kurva regresi dibangkitkan dari fungsi Eksponensial untuk  $x_{1i}$  dan Polinomial untuk  $x_{2i}$ .

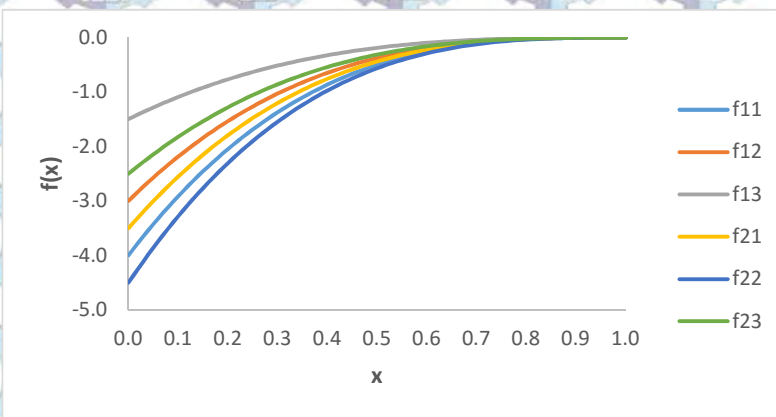




(a) Fungsi Eksponensial



(b) Fungsi Trigonometri



(c) Fungsi Polinomial

**Gambar 3.1.** Visualisasi Fungsi Distribusi



- Kelompok fungsi TP (Trigonometri-Polinomial), yaitu kurva regresi dibangkitkan dari fungsi Trigonometri untuk  $x_{1i}$  dan Polinomial untuk  $x_{2i}$ .

f. Mengestimasi kurva regresi  $\hat{f}_{tki}$  menggunakan estimator *spline* yang meminimumkan PWLS seperti yang disajikan pada langkah 3, tujuan 1.

g. Membandingkan hasil pada setiap variasi orde polinomial *spline*  $m = 2, 3, 4, 5$  pada berbagai kondisi (fungsi simulasi dan jumlah pengamatan) berdasarkan nilai *RMSE* dan  $R^2$  seperti yang disajikan pada Persamaan (2.20) dan (2.21).

2. Membandingkan kemampuan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal pada matriks varians-kovarians yang mempertimbangkan korelasi antar variabel respon dengan matriks varians-kovarians pada berbagai tingkat korelasi ( $|\rho| = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$ ), dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Menetapkan model regresi nonparametrik birespon dengan dua prediktor dengan  $N=3$  (tiga) subyek, dan  $T=20$  pengamatan, menetapkan variasi orde polinomial *spline*  $m = 4$ , seperti disajikan pada persamaan berikut

$$y_{kit} = \sum_{k=1}^2 f_{ki}(x_{tit}) + \varepsilon_{kit}, \text{ dengan } k = 1, 2; i = 1, 2, 3; t = 1, 2, \dots, 20.$$

b. Menetapkan nilai  $x_{1it}, t = 1, 2, \dots, T$  dengan  $x_{1it} \in [0, 1]$  adalah *design time point* ditetapkan  $x_{1it} = \frac{2t-1}{2T}$ . Menetapkan nilai  $x_{2it}, t = 1, 2, \dots, T$  dibangkitkan dari sebaran  $U(0, 1)$ .

c. Membangkitkan *random error*  $\varepsilon$  berdistribusi  $N$ -variat ( $M=2NT$ ) dengan  $E(\varepsilon) = 0$  dan  $\text{Var}(\varepsilon) = \Sigma$  pada dua kondisi sebagai berikut:

Kondisi 1: Matriks varians-kovarians *random error*  $\Sigma_{MK}$  mempertimbangkan korelasi antar respon sebagai berikut:



$$\Sigma_{MK} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11.1} & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{12.1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{11.2} & \dots & 0 & 0 & \Sigma_{12.2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{11.N} & 0 & 0 & \dots & \Sigma_{12.N} \\ \Sigma_{12.1} & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{22.1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{12.2} & \dots & 0 & 0 & \Sigma_{22.2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{12.N} & 0 & 0 & \dots & \Sigma_{22.N} \end{bmatrix}$$

Kondisi 2: Matriks varians-kovarians *random error*  $\Sigma_{TMK}$  tidak mempertimbangkan korelasi antar respon sebagai berikut:

$$\Sigma_{TMK} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11.1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{11.2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{11.N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{22.1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \Sigma_{22.2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \Sigma_{22.N} \end{bmatrix}$$

Variasi nilai korelasi ditetapkan  $|\rho_i| = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8;$  dan  $0,9$  seperti yang telah dijelaskan pada langkah 1(d), dengan matriks

$\Sigma_{12,i}$  bernilai  $\sigma_{12,i} = \rho_i \sqrt{\sigma_{11,i}^2 \sigma_{22,i}^2}$ . Untuk  $|\rho_i| = 0,1$  dan  $N=3$ , maka kovarians error yang digunakan pada ketiga subyek berturut-turut adalah

$$\sigma_{12,1} = 0,1 \sqrt{\sigma_{11,1}^2 \sigma_{22,1}^2}, \sigma_{12,2} = -0,1 \sqrt{\sigma_{11,2}^2 \sigma_{22,2}^2}, \text{ dan } \sigma_{12,3} = 0,1 \sqrt{\sigma_{11,3}^2 \sigma_{22,3}^2}.$$

d. Mendapatkan kurva regresi  $f_{ki}$  dari fungsi eksponensial, polinomial, dan trigonometri seperti disajikan pada langkah 1(e).

e. Mengestimasi kurva regresi  $\hat{f}_{ki}$  menggunakan estimator *spline* yang meminimumkan PWLS seperti yang disajikan pada langkah 3, tujuan 1.

f. Membandingkan hasil pada matriks varians-kovarians yang mempertimbangkan korelasi antar variabel respon dengan matriks varians-kovarians pada berbagai tingkat korelasi ( $|\rho| = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4;$



0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9) berdasarkan nilai  $RMSE$  dan  $R^2$  seperti yang disajikan pada Persamaan (2.20) dan (2.21).

3. Membandingkan kemampuan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal pada matriks varians-kovarians yang mempertimbangkan korelasi antar variabel respon dengan matriks varians-kovarians pada dua kelompok tingkat korelasi. Kelompok 1, adalah simulasi dengan nilai korelasi rendah yaitu  $-0,3 < \rho_i < 0,3$ , dan Kelompok 2, adalah simulasi dengan nilai korelasi tinggi yaitu  $-0,9 < \rho_i < -0,3$  dan  $0,3 < \rho_i < 0,9$  menggunakan langkah-langkah identik dengan langkah 2. Adapun nilai korelasi yang ditetapkan pada simulasi sebagai berikut:

Kelompok 1:  $\rho_1 = -0,12$ ;  $\rho_2 = 0,23$ ;  $\rho_3 = -0,04$ .

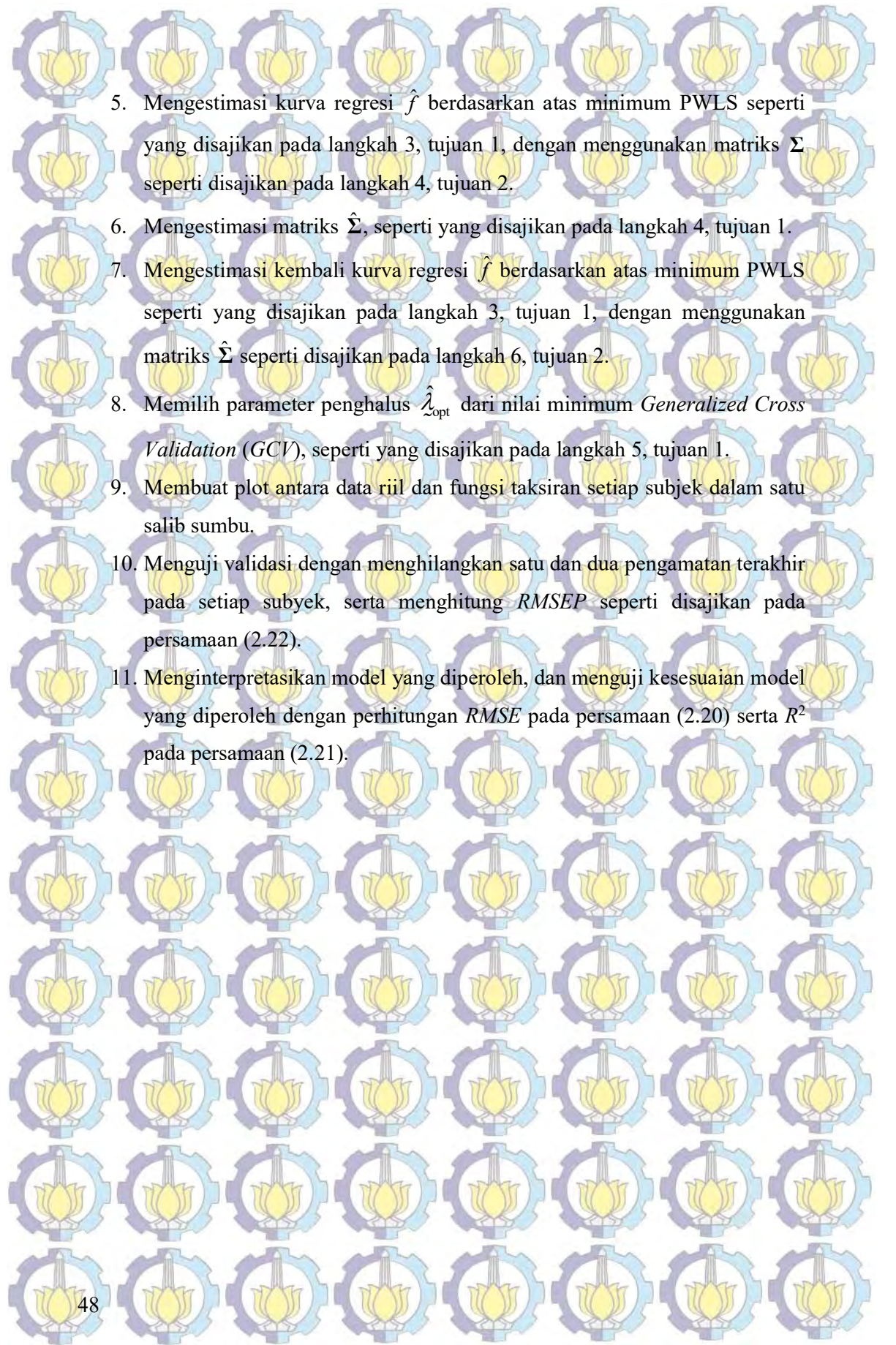
Kelompok 2:  $\rho_1 = 0,73$ ;  $\rho_2 = -0,59$ ;  $\rho_3 = -0,66$ .

### 3.2.3. Aplikasi Estimator *Spline* Birespon pada Data Penderita TB Paru

Tujuan 3 penelitian ini adalah mengaplikasikan model regresi nonparametrik birespon *spline* data pasien penderita TB paru di RSSA Malang. Adapun langkah-langkah untuk mencapai tujuan 3 adalah sebagai berikut:

1. Melakukan deskriptif tiap prediktor waktu pengamatan ( $x_1$ ), indeks masa tubuh ( $x_2$ ), laju endapan darah ( $x_3$ ) dan respon kadar suPAR ( $y_1$ ) dan jumlah monosit ( $y_2$ ).
2. Menguji korelasi antar pengamatan pada tiap subyek seperti yang disajikan pada persamaan (2.25), dan korelasi antar respon seperti yang disajikan pada persamaan (2.23).
3. Menguji hubungan linier antara prediktor dan respon seperti yang disajikan pada persamaan (2.29).
4. Menetapkan *random error*  $\varepsilon$  berdistribusi  $M$ -variat ( $M = 2NT$ ) dengan  $E(\varepsilon) = \underline{0}$  dan  $Var(\varepsilon) = \Sigma = \mathbf{I}$ . Penggunaan matriks identitas  $\mathbf{I}$  sebagai inisialisasi untuk mendapatkan  $\hat{f}$  guna mengestimasi  $\hat{\Sigma}$  yang disajikan pada tahap selanjutnya.



- 
5. Mengestimasi kurva regresi  $\hat{f}$  berdasarkan atas minimum PWLS seperti yang disajikan pada langkah 3, tujuan 1, dengan menggunakan matriks  $\hat{\Sigma}$  seperti disajikan pada langkah 4, tujuan 2.
  6. Mengestimasi matriks  $\hat{\Sigma}$ , seperti yang disajikan pada langkah 4, tujuan 1.
  7. Mengestimasi kembali kurva regresi  $\hat{f}$  berdasarkan atas minimum PWLS seperti yang disajikan pada langkah 3, tujuan 1, dengan menggunakan matriks  $\hat{\Sigma}$  seperti disajikan pada langkah 6, tujuan 2.
  8. Memilih parameter penghalus  $\hat{\lambda}_{\text{opt}}$  dari nilai minimum *Generalized Cross Validation (GCV)*, seperti yang disajikan pada langkah 5, tujuan 1.
  9. Membuat plot antara data riil dan fungsi taksiran setiap subjek dalam satu salib sumbu.
  10. Menguji validasi dengan menghilangkan satu dan dua pengamatan terakhir pada setiap subyek, serta menghitung *RMSEP* seperti disajikan pada persamaan (2.22).
  11. Menginterpretasikan model yang diperoleh, dan menguji kesesuaian model yang diperoleh dengan perhitungan *RMSE* pada persamaan (2.20) serta  $R^2$  pada persamaan (2.21).



## BAB 4

### HASIL KAJIAN TEORITIK

#### 4.1 Estimator *Spline* untuk Mengestimasi Kurva Regresi Nonparametrik Birespon pada Data Longitudinal

Data longitudinal memiliki  $N$  subyek yang saling independen, dimana setiap subyek diamati secara berulang (*repeated measurement*) dalam  $T$  kurun waktu. Pada data longitudinal yang melibatkan prediktor tunggal dengan 2 respon dan  $N$  subyek dan  $T$  pengamatan pada setiap subyek, mengikuti model regresi nonparametrik birespon untuk  $k = 1, 2; i = 1, 2, \dots, N; t = 1, 2, \dots, T$  sebagai berikut:

$$y_{kit} = f_{ki}(x_{it}) + \varepsilon_{kit}. \quad (4.1)$$

sedangkan untuk model yang melibatkan  $p$  prediktor disajikan sebagai berikut:

$$y_{kit} = \sum_{l=1}^p f_{ki}(x_{lit}) + \varepsilon_{kit}. \quad (4.2)$$

Persamaan (4.2) identik dengan persamaan (2.15) dengan membatasi kurva regresi untuk setiap prediktor adalah identik. Asumsikan bahwa data tersebut mengikuti model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal maka persamaan (4.1) dapat ditulis kembali menjadi:

$$y_{kit} = \mathcal{L}_x f_{ki} + \varepsilon_{kit}, \quad (4.3)$$

dengan  $\mathcal{L}_x f_{ki} = f_{ki}(x_{it})$ ,  $y_{kit}$  adalah respon,  $\mathcal{L}_x$  fungsional linier terbatas, dan  $f_{ki}$  adalah fungsi yang tidak/belum diketahui bentuknya dan diasumsikan *smooth* dalam arti termuat di dalam ruang  $\mathcal{H}$  seperti yang dijelaskan pada Definisi 2.2, dan  $\varepsilon_{kit}$  adalah *random error*.

Tujuan pertama dalam penelitian ini adalah mendapatkan estimator *spline* dalam mengestimasi kurva regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal seperti yang disajikan pada persamaan (4.1) dan (4.2). Untuk mempermudah mendapatkan estimator tersebut, pada bagian awal akan dijabarkan bentuk fungsi regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal, yang disajikan pada Lemma 4.1 khusus untuk persamaan yang melibatkan prediktor tunggal, dan Lemma 4.2



husus untuk persamaan yang melibatkan  $p$  prediktor. Pada bagian berikutnya akan dikembangkan estimator *spline* dalam mengestimasi kurva regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal yang disajikan pada Teorema 4.1 khusus untuk persamaan yang melibatkan prediktor tunggal, dan Teorema 4.2 khusus untuk persamaan yang melibatkan  $p$  prediktor.

#### Lemma 4.1

Jika diberikan data berpasangan  $(x_{it}, y_{1it}, y_{2it})$   $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $t = 1, 2, \dots, T$  mengikuti model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal seperti diberikan dalam persamaan (4.1), maka bentuk fungsi regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal adalah

$$\underline{f} = \mathbf{T}\underline{d} + \mathbf{V}\underline{c},$$

dengan  $\mathbf{T}$  adalah matriks berukuran  $(2NT) \times (2Nm)$  sebagai berikut:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{12} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{T}_{1N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{T}_{2N} \end{pmatrix},$$

$$\text{dengan } \mathbf{T}_{ki} = \begin{pmatrix} \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{ki1}, \phi_{kim} \rangle \\ \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{ki2}, \phi_{kim} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{kiT}, \phi_{kim} \rangle \end{pmatrix},$$

$\underline{d}$  adalah vektor berukuran  $2Nm$ , diberikan oleh :

$$\underline{d} = (d_{11}^T, d_{12}^T, \dots, d_{1N}^T, d_{21}^T, d_{22}^T, \dots, d_{2N}^T)^T, \text{ dengan } d_{ki}^T = (d_{ki1}, d_{ki2}, \dots, d_{kim}),$$

$\mathbf{V}$  adalah matriks berukuran  $(2NT) \times (2NT)$  sebagai berikut:



$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_{12} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V_{1N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & V_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & V_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & V_{2N} \end{pmatrix},$$

dengan  $V_{ki} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{ki1}, \xi_{ki1} \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle \xi_{ki2}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki2}, \xi_{ki2} \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{kiT}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{kiT}, \xi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \xi_{kiT}, \xi_{kiT} \rangle \end{pmatrix},$

$\xi$  adalah vektor berukuran  $2NT$ , diberikan oleh :

$$\xi = (\xi_{11}^T, \xi_{12}^T, \dots, \xi_{1N}^T, \xi_{21}^T, \xi_{22}^T, \dots, \xi_{2N}^T)^T, \text{ dengan } \xi_{ki}^T = (c_{ki1}, c_{ki2}, \dots, c_{kiT}).$$

**Bukti:**

Fungsi  $f = (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1N}, f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2N})^T$  adalah kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya dan diasumsikan *smooth* dalam arti termuat di dalam ruang  $\mathcal{H}$ . Selanjutnya ruang  $\mathcal{H}$  didekomposisikan menjadi *direct sum* dari dua ruang  $\mathcal{H}_0$  dan  $\mathcal{H}_1$ , yaitu :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \text{ dengan } \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1^\perp.$$

Jika basis untuk ruang  $\mathcal{H}_0$  adalah  $\{\phi_{ki1}, \phi_{ki2}, \dots, \phi_{kim}\}$  dengan  $m$  adalah orde polinomial *spline*, dan basis untuk ruang  $\mathcal{H}_1$  adalah  $\{\xi_{ki1}, \xi_{ki2}, \dots, \xi_{kiT}\}$  dengan  $T$  adalah banyaknya waktu pengamatan, maka untuk setiap fungsi  $f_{ki} \in \mathcal{H}$  secara tunggal menjadi :

$$f_{ki} = g_{ki} + h_{ki}, \quad (4.4)$$

dengan fungsi  $g_{ki} \in \mathcal{H}_0$  sebagai berikut:

$$g_{ki} = \sum_{j=1}^m d_{kij} \phi_{kij} = \phi_{ki}^T d_{ki},$$

untuk suatu konstanta  $d_{kij}$ , dan fungsi  $h_{ki} \in \mathcal{H}_1$  sebagai berikut:



$$h_{ki} = \sum_{t=1}^T c_{kit} \xi_{kit} = \xi_{ki}^T c_{ki},$$

untuk suatu konstanta  $c_{kit}$ . Selanjutnya untuk setiap fungsi  $f_{ki} \in \mathcal{H}$  pada persamaan (4.4), secara tunggal dijabarkan sebagai berikut :

$$f_{ki} = g_{ki} + h_{ki} = \sum_{j=1}^m d_{kij} \phi_{kij} + \sum_{t=1}^T c_{kit} \xi_{kit}$$

$$f_{ki} = \phi_{ki}^T d_{ki} + \xi_{ki}^T c_{ki}, \quad (4.5)$$

dengan vektor-vektor  $\phi_{ki}$ ,  $d_{ki}$ ,  $\xi_{ki}$ ,  $c_{ki}$  berturut-turut diberikan oleh :

$$\phi_{ki} = (\phi_{ki1}, \phi_{ki2}, \dots, \phi_{kim})^T, \text{ dan } d_{ki} = (d_{ki1}, d_{ki2}, \dots, d_{kim})^T,$$

$$\xi_{ki} = (\xi_{ki1}, \xi_{ki2}, \dots, \xi_{kiT})^T, \text{ dan } c_{ki} = (c_{ki1}, c_{ki2}, \dots, c_{kiT})^T.$$

Dengan menjabarkan  $\mathcal{L}_x$  sebagai fungsional linier terbatas pada ruang  $\mathcal{H}$  dan fungsi  $f_{ki} \in \mathcal{H}$ , maka persamaan (4.5) dapat disajikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x f_{ki} &= \mathcal{L}_x (g_{ki} + h_{ki}) \\ &= \mathcal{L}_x g_{ki} + \mathcal{L}_x h_{ki} \\ &= g_{ki}(x_{it}) + h_{ki}(x_{it}) \\ &= f_{ki}(x_{it}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Berdasarkan Teorema Representasi *Riesz* dan  $\mathcal{L}_x$  adalah fungsional linier terbatas pada ruang  $\mathcal{H}$ , diperoleh nilai tunggal  $\eta_{kit} \in \mathcal{H}$  yang merupakan representasi dari

$\mathcal{L}_x$ , dan memenuhi persamaan:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x f_{ki} &= \langle \eta_{kit}, f_{ki} \rangle \\ &= f_{ki}(x_{it}), \quad f_{ki} \in \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Berdasarkan Persamaan (4.6) dan (4.7), maka  $f_{ki}(x_{it})$  dapat dinyatakan menjadi :

$$f_{ki}(x_{it}) = \langle \eta_{kit}, f_{ki} \rangle, \quad \eta_{kit} \in \mathcal{H}$$



$$\begin{aligned}
&= \left\langle \eta_{kit}, \phi_{ki}^T d_{ki} + \xi_{ki}^T c_{ki} \right\rangle \\
&= \left\langle \eta_{kit}, \phi_{ki}^T d_{ki} \right\rangle + \left\langle \eta_{kit}, \xi_{ki}^T c_{ki} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Dari persamaan (4.8), untuk  $k=1, i=1$ , diperoleh :

$$f_{11}(x_{1t}) = \left\langle \eta_{11t}, \phi_{11}^T d_{11} \right\rangle + \left\langle \eta_{11t}, \xi_{11}^T c_{11} \right\rangle, \quad t=1, 2, \dots, T.$$

Selanjutnya untuk  $t=1$ , diperoleh :

$$\begin{aligned}
f_{11}(x_{11}) &= \left\langle \eta_{111}, \phi_{11}^T d_{11} \right\rangle + \left\langle \eta_{111}, \xi_{11}^T c_{11} \right\rangle \\
&= \left\langle \eta_{111}, (\phi_{111} \quad \phi_{112} \quad \dots \quad \phi_{11m}) \begin{pmatrix} d_{111} \\ d_{112} \\ \vdots \\ d_{11m} \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \eta_{111}, (\xi_{111} \quad \xi_{112} \quad \dots \quad \xi_{11N}) \begin{pmatrix} c_{111} \\ c_{112} \\ \vdots \\ c_{11N} \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \eta_{111}, (\phi_{111} d_{111} + \phi_{112} d_{112} + \dots + \phi_{11m} d_{11m}) \right\rangle + \left\langle \eta_{111}, (\xi_{111} c_{111} + \xi_{112} c_{112} + \dots + \xi_{11N} c_{11N}) \right\rangle \\
&= \left\langle \eta_{111}, \phi_{111} d_{111} \right\rangle + \left\langle \eta_{111}, \phi_{112} d_{112} \right\rangle + \dots + \left\langle \eta_{111}, \phi_{11m} d_{11m} \right\rangle + \left\langle \eta_{111}, \xi_{111} c_{111} \right\rangle + \left\langle \eta_{111}, \xi_{112} c_{112} \right\rangle + \\
&\quad \dots + \left\langle \eta_{111}, \xi_{11N} c_{11N} \right\rangle \\
f_{11}(x_{11}) &= d_{111} \left\langle \eta_{111}, \phi_{111} \right\rangle + d_{112} \left\langle \eta_{111}, \phi_{112} \right\rangle + \dots + d_{11m} \left\langle \eta_{111}, \phi_{11m} \right\rangle + c_{111} \left\langle \eta_{111}, \xi_{111} \right\rangle + \\
&\quad + c_{112} \left\langle \eta_{111}, \xi_{112} \right\rangle + \dots + c_{11N} \left\langle \eta_{111}, \xi_{11N} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Dengan cara yang serupa, untuk  $t=2$  diperoleh :

$$\begin{aligned}
f_{11}(x_{12}) &= \left\langle \eta_{112}, \phi_{11}^T d_{11} \right\rangle + \left\langle \eta_{112}, \xi_{11}^T c_{11} \right\rangle \\
&= d_{111} \left\langle \eta_{112}, \phi_{111} \right\rangle + d_{112} \left\langle \eta_{112}, \phi_{112} \right\rangle + \dots + d_{11m} \left\langle \eta_{112}, \phi_{11m} \right\rangle + c_{111} \left\langle \eta_{112}, \xi_{111} \right\rangle + \\
&\quad c_{112} \left\langle \eta_{112}, \xi_{112} \right\rangle + \dots + c_{11N} \left\langle \eta_{112}, \xi_{11N} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Apabila proses diteruskan dengan cara yang serupa, untuk  $t=T$  diperoleh :

$$\begin{aligned}
f_{11}(x_{1T}) &= \left\langle \eta_{11T}, \phi_{11}^T d_{11} \right\rangle + \left\langle \eta_{11T}, \xi_{11}^T c_{11} \right\rangle \\
&= d_{111} \left\langle \eta_{11T}, \phi_{111} \right\rangle + d_{112} \left\langle \eta_{11T}, \phi_{112} \right\rangle + \dots + d_{11m} \left\langle \eta_{11T}, \phi_{11m} \right\rangle + c_{111} \left\langle \eta_{11T}, \xi_{111} \right\rangle + \\
&\quad c_{112} \left\langle \eta_{11T}, \xi_{112} \right\rangle + \dots + c_{11T} \left\langle \eta_{11T}, \xi_{11T} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Akibatnya vektor dari fungsi  $f_{11}$  dalam bentuk :



$$\begin{aligned}
f_{11} &= \begin{pmatrix} f_{11}(x_{11}) \\ f_{11}(x_{12}) \\ \vdots \\ f_{11}(x_{1T}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_{111}\langle\eta_{111},\phi_{111}\rangle + \dots + d_{11m}\langle\eta_{111},\phi_{11m}\rangle + c_{111}\langle\eta_{111},\xi_{111}\rangle + \dots + c_{11T}\langle\eta_{111},\xi_{11T}\rangle \\ d_{111}\langle\eta_{112},\phi_{111}\rangle + \dots + d_{11m}\langle\eta_{112},\phi_{11m}\rangle + c_{111}\langle\eta_{112},\xi_{111}\rangle + \dots + c_{11T}\langle\eta_{112},\xi_{11T}\rangle \\ \vdots \\ d_{111}\langle\eta_{11T},\phi_{111}\rangle + \dots + d_{11m}\langle\eta_{11T},\phi_{11m}\rangle + c_{111}\langle\eta_{11T},\xi_{111}\rangle + \dots + c_{11T}\langle\eta_{11T},\xi_{11T}\rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \langle\eta_{111},\phi_{111}\rangle & \langle\eta_{111},\phi_{112}\rangle & \dots & \langle\eta_{111},\phi_{11m}\rangle \\ \langle\eta_{112},\phi_{111}\rangle & \langle\eta_{112},\phi_{112}\rangle & \dots & \langle\eta_{112},\phi_{11m}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\eta_{11T},\phi_{111}\rangle & \langle\eta_{11T},\phi_{112}\rangle & \dots & \langle\eta_{11T},\phi_{11m}\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{111} \\ d_{112} \\ \vdots \\ d_{11m} \end{pmatrix} + \\
&\quad \begin{pmatrix} \langle\eta_{111},\xi_{111}\rangle & \langle\eta_{111},\xi_{112}\rangle & \dots & \langle\eta_{111},\xi_{11T}\rangle \\ \langle\eta_{112},\xi_{111}\rangle & \langle\eta_{112},\xi_{112}\rangle & \dots & \langle\eta_{112},\xi_{11T}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\eta_{11T},\xi_{111}\rangle & \langle\eta_{11T},\xi_{112}\rangle & \dots & \langle\eta_{11T},\xi_{11T}\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{111} \\ c_{112} \\ \vdots \\ c_{11T} \end{pmatrix} \\
f_{11} &= \mathbf{T}_{11}\mathbf{d}_{11} + \mathbf{V}_{11}\boldsymbol{\xi}_{11}, \tag{4.9}
\end{aligned}$$

dengan :

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{11} &= \begin{pmatrix} \langle\eta_{111},\phi_{111}\rangle & \langle\eta_{111},\phi_{112}\rangle & \dots & \langle\eta_{111},\phi_{11m}\rangle \\ \langle\eta_{112},\phi_{111}\rangle & \langle\eta_{112},\phi_{112}\rangle & \dots & \langle\eta_{112},\phi_{11m}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\eta_{11T},\phi_{111}\rangle & \langle\eta_{11T},\phi_{112}\rangle & \dots & \langle\eta_{11T},\phi_{11m}\rangle \end{pmatrix}, \text{ dan } \mathbf{d}_{11} = \begin{pmatrix} d_{111} \\ d_{112} \\ \vdots \\ d_{11m} \end{pmatrix} \\
\mathbf{V}_{11} &= \begin{pmatrix} \langle\eta_{111},\xi_{111}\rangle & \langle\eta_{111},\xi_{112}\rangle & \dots & \langle\eta_{111},\xi_{11T}\rangle \\ \langle\eta_{112},\xi_{111}\rangle & \langle\eta_{112},\xi_{112}\rangle & \dots & \langle\eta_{112},\xi_{11T}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\eta_{11T},\xi_{111}\rangle & \langle\eta_{11T},\xi_{112}\rangle & \dots & \langle\eta_{11T},\xi_{11T}\rangle \end{pmatrix}, \text{ dan } \boldsymbol{\xi}_{11} = \begin{pmatrix} c_{111} \\ c_{112} \\ \vdots \\ c_{11T} \end{pmatrix}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

$\mathbf{T}_{11}$  adalah matriks berukuran  $T \times m$ ,  $\mathbf{d}_{11}$  adalah vektor berukuran  $m$ ,  $\mathbf{V}_{11}$  adalah

matriks berukuran  $T \times T$ ,  $\boldsymbol{\xi}_{11}$  adalah vektor berukuran  $T$ . Mengingat

$\langle\eta_{11i},\xi_{11i}\rangle = \langle\xi_{11i},\xi_{11i}\rangle$ , maka  $\mathbf{V}_{11}$  pada Persamaan (4.10) dapat ditulis menjadi :



$$\mathbf{V}_{11} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{111}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{111}, \xi_{112} \rangle & \cdots & \langle \xi_{111}, \xi_{11T} \rangle \\ \langle \xi_{112}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{112}, \xi_{112} \rangle & \cdots & \langle \xi_{112}, \xi_{11T} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{11T}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{11T}, \xi_{112} \rangle & \cdots & \langle \xi_{11T}, \xi_{11T} \rangle \end{pmatrix}$$

Berkaitan dengan data longitudinal, dimana pengamatan didasarkan atas urutan waktu (Verbeke & Molenberghs, 2000; Wu & Zhang, 2006), maka pengamatan ke- $t$  dipengaruhi oleh pengamatan ke- $(t-1)$ ,  $(t-2)$ , dan seterusnya, tetapi pengamatan ke- $t$  tidak dipengaruhi oleh pengamatan ke- $(t+1)$ ,  $(t+2)$ , dan seterusnya, sehingga matriks  $\mathbf{V}_{11}$  berupa matriks segitiga bawah sebagai berikut:

$$\mathbf{V}_{11} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{111}, \xi_{111} \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \langle \xi_{112}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{112}, \xi_{112} \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{11T}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{11T}, \xi_{112} \rangle & \cdots & \langle \xi_{11T}, \xi_{11T} \rangle \end{pmatrix}$$

Pembuktian penggunaan matriks tersebut disajikan pada Lampiran 2.3. Selanjutnya dengan cara yang serupa untuk  $k = 1, 2; i = 1, 2, \dots, N$  seperti disajikan pada Persaman (4.9) dan (4.10), diperoleh hasil:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{ki} &= \begin{pmatrix} f_{ki}(x_{i1}) \\ f_{ki}(x_{i2}) \\ \vdots \\ f_{ki}(x_{iT}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{ki1} \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki1} \rangle + \dots + d_{kim} \langle \eta_{ki1}, \phi_{kim} \rangle + c_{ki1} \langle \eta_{ki1}, \xi_{ki1} \rangle \\ d_{ki1} \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki1} \rangle + \dots + d_{kim} \langle \eta_{ki2}, \phi_{kim} \rangle + \sum_{t=1}^2 c_{kit} \langle \eta_{ki2}, \xi_{kit} \rangle \\ \vdots \\ d_{ki1} \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki1} \rangle + \dots + d_{kim} \langle \eta_{kiT}, \phi_{kim} \rangle + \sum_{t=1}^T c_{kit} \langle \eta_{kiT}, \xi_{kit} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki2} \rangle & \cdots & \langle \eta_{ki1}, \phi_{kim} \rangle \\ \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki2} \rangle & \cdots & \langle \eta_{ki2}, \phi_{kim} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki2} \rangle & \cdots & \langle \eta_{kiT}, \phi_{kim} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{ki1} \\ d_{ki2} \\ \vdots \\ d_{kim} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle \eta_{ki1}, \xi_{ki1} \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \langle \eta_{ki2}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki2}, \xi_{ki2} \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_{kiT}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{kiT}, \xi_{ki2} \rangle & \cdots & \langle \eta_{kiT}, \xi_{kiT} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{ki1} \\ c_{ki2} \\ \vdots \\ c_{kiT} \end{pmatrix} \\ \tilde{f}_{ki} &= \mathbf{T}_{ki} \mathbf{d}_{ki} + \mathbf{V}_{ki} \mathbf{c}_{ki}. \end{aligned} \quad (4.11)$$



$T_{ki}$  adalah matriks berukuran  $T \times m$ ,  $d_{ki}$  adalah vektor berukuran  $m$ ,  $V_{ki}$  adalah matriks berukuran  $T \times T$ ,  $\xi_{ki}$  adalah vektor berukuran  $T$ . Dengan demikian, bentuk estimator *spline*  $f$  pada persamaan (4.11) dijabarkan sebagai berikut:

$$f = \begin{pmatrix} T_{11}d_{11} + V_{11}\xi_{11} \\ T_{12}d_{12} + V_{12}\xi_{12} \\ \vdots \\ T_{1N}d_{1N} + V_{1N}\xi_{1N} \\ T_{21}d_{21} + V_{21}\xi_{21} \\ T_{22}d_{22} + V_{22}\xi_{22} \\ \vdots \\ T_{2N}d_{2N} + V_{2N}\xi_{2N} \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_{12} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_{1N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & T_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & T_{2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ \vdots \\ d_{1N} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{2N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_{12} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V_{1N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & V_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & V_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & V_{2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \vdots \\ \xi_{1N} \\ \xi_{21} \\ \xi_{22} \\ \vdots \\ \xi_{2N} \end{pmatrix}$$

$$f = Td + V\xi, \quad (4.12)$$

dengan  $T$  adalah matriks berukuran  $(2NT) \times (2Nm)$  sebagai berikut:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_{12} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_{1N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & T_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & T_{2N} \end{pmatrix},$$

$$T_{ki} = \begin{pmatrix} \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{ki1}, \phi_{kim} \rangle \\ \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{ki2}, \phi_{kim} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{kiT}, \phi_{kim} \rangle \end{pmatrix}.$$



$\underline{d}$  adalah vektor berukuran  $2Nm$ , diberikan oleh :

$$\underline{d} = (d_{11}^T, d_{12}^T, \dots, d_{1N}^T, d_{21}^T, d_{22}^T, \dots, d_{2N}^T)^T, \text{ dengan } d_{ki}^T = (d_{ki1}, d_{ki2}, \dots, d_{kim}).$$

$\mathbf{V}$  adalah matriks berukuran  $(2NT) \times (2NT)$  sebagai berikut:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{12} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{V}_{1N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{V}_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{V}_{2N} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}_{ki} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{ki1}, \xi_{ki1} \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle \xi_{ki2}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki2}, \xi_{ki2} \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{kiT}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{kiT}, \xi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \xi_{kiT}, \xi_{kiT} \rangle \end{pmatrix},$$

$\underline{c}$  adalah vektor berukuran  $2NT$ , diberikan oleh :

$$\underline{c} = (c_{11}^T, c_{12}^T, \dots, c_{1N}^T, c_{21}^T, c_{22}^T, \dots, c_{2N}^T)^T, \text{ dengan } c_{ki}^T = (c_{ki1}, c_{ki2}, \dots, c_{kiT}).$$

Matriks  $\mathbf{T}_{ki}$  pada persamaan (4.11) memiliki bentuk *reproducing kernel* di ruang

$\mathcal{H}_0$  sebagai berikut:

$$\mathbf{T}_{ki} = \begin{pmatrix} \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{ki1}, \phi_{kim} \rangle \\ \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{ki2}, \phi_{kim} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{kiT}, \phi_{kim} \rangle \end{pmatrix},$$



dengan

$$\langle \eta_{kit}, \phi_{kij} \rangle = \mathcal{L}_x \phi_{kij} = \frac{x_{it}^{j-1}}{(j-1)!}, \quad t=1,2,\dots,T; j=1,2,\dots,m \quad (4.13)$$

Matriks  $\mathbf{V}_{ki}$  pada persamaan (4.11) memiliki bentuk *reproducing kernel* di ruang  $\mathcal{H}_i$  sebagai berikut:

$$\mathbf{V}_{ki} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{ki1}, \xi_{ki1} \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle \xi_{ki2}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki2}, \xi_{ki2} \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{kiT}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{kiT}, \xi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \xi_{kiT}, \xi_{kiT} \rangle \end{pmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned} \langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle &= \mathcal{L}_{xit} \xi_{kis} = R_1(x_{it}, x_{is}) \\ &= \int_a^b \frac{(x_{it}-u)_+^{m-1} (x_{is}-u)_+^{m-1}}{((m-1)!)^2} du, \quad t=1,2,\dots,T; s=1,2,\dots,T, \end{aligned} \quad (4.14)$$

dengan  $(x_{it}-u)_+^{m-1} = (x_{it}-u)^{m-1}$  untuk  $x_{it}-u \geq 0$  atau dapat ditulis  $x_{it} \geq u$  dan  $(x_{it}-u)_+^{m-1} = 0$  untuk  $x_{it}-u < 0$  atau dapat ditulis  $x_{it} < u$ . Jika  $a \leq u \leq b$ , dan  $a = \min(x_{it})$ , maka berlaku  $x_{it} \geq u$ , sehingga  $(x_{it}-u)_+^{m-1} = (x_{it}-u)^{m-1}$ . Pada bagian berikut akan disajikan perhitungan pada berbagai tingkatan orde polinomial *spline* ( $m = 2, 3, 4, 5$ ).

Penjabaran persamaan (4.14) untuk  $m = 2$  (linier) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle &= \int_a^b (x_{it}-u)(x_{is}-u) du \\ &= \int_a^b [x_{it}x_{is} - x_{it}u - x_{is}u + u^2] du \\ &= x_{it}x_{is}u - \frac{1}{2}x_{it}u^2 - \frac{1}{2}x_{is}u^2 + \frac{1}{3}u^3 \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Untuk  $x \in [0,1]$ , diperoleh  $\langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle = x_{it}x_{is} - \frac{1}{2}(x_{it} + x_{is}) + \frac{1}{3}$ .

Penjabaran persamaan (4.14) untuk  $m = 3$  (kuadratik) adalah sebagai berikut:



$$\begin{aligned}
\langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle &= \int_a^b \frac{(x_{it} - u)^2 (x_{is} - u)^2}{2^2} du \\
&= \frac{1}{4} \int_a^b (x_{it}^2 - 2x_{it}u + u^2)(x_{is}^2 - 2x_{is}u + u^2) du \\
\langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle &= \frac{1}{4} \int_a^b \{x_{it}^2 x_{is}^2 - 2x_{it}^2 x_{is} u + x_{it}^2 u^2 - 2x_{it} x_{is}^2 u + 4x_{it} x_{is} u^2 \\
&\quad - 2x_{it} u^3 + x_{is}^2 u^2 - 2x_{is} u^3 + u^4\} du \\
&= \frac{1}{4} \int_a^b \{x_{it}^2 x_{is}^2 - 2(x_{it}^2 x_{is} + x_{it} x_{is}^2)u + (x_{it}^2 + 4x_{it} x_{is} + x_{is}^2)u^2 \\
&\quad - 2(x_{it} + x_{is})u^3 + u^4\} du \\
&= \frac{1}{4} x_{it}^2 x_{is}^2 u - \frac{1}{4} (x_{it}^2 x_{is} + x_{it} x_{is}^2) u^2 + \frac{1}{12} (x_{it}^2 + 4x_{it} x_{is} + x_{is}^2) u^3 - \frac{1}{8} (x_{it} + x_{is}) u^4 + \frac{1}{20} u^5 \Big|_a^b.
\end{aligned}$$

Untuk  $x \in [0,1]$ , diperoleh

$$\langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle = \frac{1}{4} x_{it}^2 x_{is}^2 - \frac{1}{4} (x_{it}^2 x_{is} + x_{it} x_{is}^2) + \frac{1}{12} (x_{it}^2 + 4x_{it} x_{is} + x_{is}^2) - \frac{1}{8} (x_{it} + x_{is}) + \frac{1}{20}.$$

Penjabaran persamaan (4.14) untuk  $m = 4$  (kubik) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle &= \int_a^b \frac{(x_{it} - u)^3 (x_{is} - u)^3}{6^2} du \\
&= \frac{1}{36} \int_a^b (x_{it}^3 - 3x_{it}^2 u + 3x_{it} u^2 - u^3)(x_{is}^3 - 3x_{is}^2 u + 3x_{is} u^2 - u^3) du \\
&= \frac{1}{36} \int_a^b \{ (x_{it}^3 x_{is}^3 - 3x_{it}^3 x_{is}^2 u + 3x_{it}^3 x_{is} u^2 - x_{it}^3 u^3) + (-3x_{it}^2 x_{is}^3 u + 9x_{it}^2 x_{is}^2 u^2 - 9x_{it}^2 x_{is} u^3 + 3x_{it}^2 u^4) \\
&\quad + (3x_{it} x_{is}^3 u^2 - 9x_{it} x_{is}^2 u^3 + 9x_{it} x_{is} u^4 - 3x_{it} u^5) + (-x_{is}^3 u^3 + 3x_{is}^2 u^4 - 3x_{is} u^5 + u^6) \} du \\
&= \frac{1}{36} \int_a^b \{ (x_{it}^3 x_{is}^3) - 3(x_{it}^3 x_{is}^2 + x_{it}^2 x_{is}^3)u + 3(x_{it}^3 x_{is} + 3x_{it}^2 x_{is}^2 + x_{it} x_{is}^3)u^2 \\
&\quad - (x_{it}^3 + 9x_{it}^2 x_{is} + 9x_{it} x_{is}^2 + x_{is}^3)u^3 + 3(x_{it}^2 + 3x_{it} x_{is} + x_{is}^2)u^4 - 3(x_{it} + x_{is})u^5 + u^6 \} du \\
&= \frac{1}{36} (x_{it}^3 x_{is}^3) u - \frac{1}{24} (x_{it}^3 x_{is}^2 + x_{it}^2 x_{is}^3) u^2 + \frac{1}{36} (x_{it}^3 x_{is} + 3x_{it}^2 x_{is}^2 + x_{it} x_{is}^3) u^3 \\
&\quad - \frac{1}{144} (x_{it}^3 + 9x_{it}^2 x_{is} + 9x_{it} x_{is}^2 + x_{is}^3) u^4 + \frac{1}{60} (x_{it}^2 + 3x_{it} x_{is} + x_{is}^2) u^5 - \frac{1}{72} (x_{it} + x_{is}) u^6 + \frac{1}{252} u^7 \Big|_a^b.
\end{aligned}$$

Untuk  $x \in [0,1]$ , diperoleh

$$\begin{aligned}
\langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle &= \frac{1}{36} (x_{it}^3 x_{is}^3) - \frac{1}{24} (x_{it}^3 x_{is}^2 + x_{it}^2 x_{is}^3) + \frac{1}{36} (x_{it}^3 x_{is} + 3x_{it}^2 x_{is}^2 + x_{it} x_{is}^3) \\
&\quad - \frac{1}{144} (x_{it}^3 + 9x_{it}^2 x_{is} + 9x_{it} x_{is}^2 + x_{is}^3) + \frac{1}{60} (x_{it}^2 + 3x_{it} x_{is} + x_{is}^2) - \frac{1}{72} (x_{it} + x_{is}) + \frac{1}{252}.
\end{aligned}$$



Penjabaran persamaan (4.14) untuk  $m = 5$  (kuartik) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle &= \int_a^b \frac{(x_{it} - u)^4 (x_{is} - u)^4}{24^2} du \\
 &= \frac{1}{576} \int_a^b (x_{it}^4 - 4x_{it}^3 u + 6x_{it}^2 u^2 - 4x_{it} u^3 + u^4)(x_{is}^4 - 4x_{is}^3 u + 6x_{is}^2 u^2 - 4x_{is} u^3 + u^4) du \\
 &= \frac{1}{576} \int_a^b \{x_{it}^4 x_{is}^4 - 4x_{it}^4 x_{is}^3 u + 6x_{it}^4 x_{is}^2 u^2 - 4x_{it}^4 x_{is} u^3 + x_{it}^4 u^4 - 4x_{it}^3 x_{is}^4 u + 16x_{it}^3 x_{is}^3 u^2 - 24x_{it}^3 x_{is}^2 u^3 \\
 &\quad + 16x_{it}^3 x_{is} u^4 - 4x_{it}^3 u^5 + 6x_{it}^2 x_{is}^4 u^2 - 24x_{it}^2 x_{is}^3 u^3 + 36x_{it}^2 x_{is}^2 u^4 - 24x_{it}^2 x_{is} u^5 + 6x_{it}^2 u^6 - 4x_{it} x_{is}^4 u^3 \\
 &\quad + 16x_{it} x_{is}^3 u^4 - 24x_{it} x_{is}^2 u^5 + 16x_{it} x_{is} u^6 - 4x_{it} u^7 + x_{is}^4 u^4 - 4x_{is}^3 u^5 + 6x_{is}^2 u^6 - 4x_{is} u^7 + u^8\} du \\
 &= \frac{1}{576} \int_a^b \{x_{it}^4 x_{is}^4 + (-4x_{it}^4 x_{is}^3 - 4x_{it}^3 x_{is}^4)u + (6x_{it}^4 x_{is}^2 + 16x_{it}^3 x_{is}^3 + 6x_{it}^2 x_{is}^4)u^2 + (-4x_{it}^4 x_{is} - 24x_{it}^3 x_{is}^2 - 24x_{it}^2 x_{is}^3 - 4x_{it} x_{is}^4)u^3 \\
 &\quad + (x_{it}^4 + 16x_{it}^3 x_{is} + 36x_{it}^2 x_{is}^2 + 16x_{it} x_{is}^3 + x_{is}^4)u^4 + (-4x_{it}^3 - 24x_{it}^2 x_{is} - 24x_{it} x_{is}^2 - 4x_{is}^3)u^5 \\
 &\quad + (6x_{it}^2 + 16x_{it} x_{is} + 6x_{is}^2)u^6 + (-4x_{it} - 4x_{is})u^7 + u^8\} du \\
 &= \left[ \frac{1}{576} x_{it}^4 x_{is}^4 u - \frac{1}{288} (x_{it}^4 x_{is}^3 + x_{it}^3 x_{is}^4) u^2 + \frac{1}{1728} (6x_{it}^4 x_{is}^2 + 16x_{it}^3 x_{is}^3 + 6x_{it}^2 x_{is}^4) u^3 - \frac{1}{576} (x_{it}^4 x_{is} + 6x_{it}^3 x_{is}^2 + 6x_{it}^2 x_{is}^3 + x_{it} x_{is}^4) u^4 \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2880} (x_{it}^4 + 16x_{it}^3 x_{is} + 36x_{it}^2 x_{is}^2 + 16x_{it} x_{is}^3 + x_{is}^4) u^5 - \frac{1}{1728} (x_{it}^3 + 6x_{it}^2 x_{is} + 6x_{it} x_{is}^2 + x_{is}^3) u^6 \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4032} (6x_{it}^2 + 16x_{it} x_{is} + 6x_{is}^2) u^7 - \frac{1}{1152} (x_{it} + x_{is}) u^8 + u^9 \right]_a^b
 \end{aligned}$$

Untuk  $x \in [0, 1]$ , diperoleh

$$\begin{aligned}
 \langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle &= \frac{1}{576} x_{it}^4 x_{is}^4 - \frac{1}{288} (x_{it}^4 x_{is}^3 + x_{it}^3 x_{is}^4) + \frac{1}{1728} (6x_{it}^4 x_{is}^2 + 16x_{it}^3 x_{is}^3 + 6x_{it}^2 x_{is}^4) \\
 &\quad - \frac{1}{576} (x_{it}^4 x_{is} + 6x_{it}^3 x_{is}^2 + 6x_{it}^2 x_{is}^3 + x_{it} x_{is}^4) + \frac{1}{2880} (x_{it}^4 + 16x_{it}^3 x_{is} + 36x_{it}^2 x_{is}^2 + 16x_{it} x_{is}^3 + x_{is}^4) \\
 &\quad - \frac{1}{1728} (x_{it}^3 + 6x_{it}^2 x_{is} + 6x_{it} x_{is}^2 + x_{is}^3) + \frac{1}{4032} (6x_{it}^2 + 16x_{it} x_{is} + 6x_{is}^2) - \frac{1}{1152} (x_{it} + x_{is})
 \end{aligned}$$

Implementasi model regresi *spline* disajikan pada Lampiran 2.1 untuk kasus regresi linier sederhana, dan Lampiran 2.2 untuk kasus regresi birespon untuk data longitudinal. Contoh implementasi matriks **T** dan **V** disajikan pada Lampiran 2.4.

Dari matriks **T** dan **V** di atas, diperoleh odell regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal untuk orde polinomial *spline*  $m$  sebagai berikut:

$$f_{kit} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{(j-1)!} d_{kij} x_{it}^{(j-1)} + \sum_{s=0}^{t-1} c_{ki(t-s)} \int_a^b \frac{(x_{it} - u)_+^{m-1} (x_{i(t-s)} - u)_+^{m-1}}{((m-1)!)^2} du, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

Model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal menggunakan orde polinomial *spline*  $m = 2$  (linier) sebagai berikut:

$$f_{kit} = d_{ki1} + d_{ki2} x_{it} + \sum_{s=0}^{t-1} c_{ki(t-s)} [x_{it} x_{is} - \frac{1}{2} (x_{it} + x_{is}) + \frac{1}{3}], \quad t = 1, 2, \dots, T$$



Model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal menggunakan orde polinomial *spline*  $m = 3$  (kuadratik) sebagai berikut:

$$f_{kit} = d_{ki1} + d_{ki2}x_{it} + \frac{1}{2}d_{ki3}x_{it}^2 + \sum_{s=0}^{t-1} c_{ki(t-s)} \left[ \frac{1}{4}x_{it}^2x_{is}^2 - \frac{1}{4}(x_{it}^2x_{is} + x_{it}x_{is}^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{12}(x_{it}^2 + 4x_{it}x_{is} + x_{is}^2) - \frac{1}{8}(x_{it} + x_{is}) + \frac{1}{20} \right], t = 1, 2, \dots, T$$

Model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal menggunakan orde polinomial *spline*  $m = 4$  (kubik) sebagai berikut:

$$f_{kit} = d_{ki1} + d_{ki2}x_{it} + \frac{1}{2}d_{ki3}x_{it}^2 + \frac{1}{6}d_{ki4}x_{it}^3 + \sum_{s=0}^{t-1} c_{ki(t-s)} \left[ \frac{1}{36}(x_{it}^3x_{is}^3) - \frac{1}{24}(x_{it}^3x_{is}^2 + x_{it}^2x_{is}^3) \right. \\ \left. + \frac{1}{36}(x_{it}^3x_{is} + 3x_{it}^2x_{is}^2 + x_{it}x_{is}^3) - \frac{1}{144}(x_{it}^3 + 9x_{it}^2x_{is} + 9x_{it}x_{is}^2 + x_{is}^3) \right. \\ \left. + \frac{1}{60}(x_{it}^2 + 3x_{it}x_{is} + x_{is}^2) - \frac{1}{72}(x_{it} + x_{is}) + \frac{1}{252} \right], t = 1, 2, \dots, T$$

Model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal menggunakan orde polinomial *spline*  $m = 5$  (kuartik) sebagai berikut:

$$f_{kit} = d_{ki1} + d_{ki2}x_{it} + \frac{1}{2}d_{ki3}x_{it}^2 + \frac{1}{6}d_{ki4}x_{it}^3 + \frac{1}{24}d_{ki5}x_{it}^4 + \sum_{s=0}^{t-1} c_{ki(t-s)} \left[ \frac{1}{576}x_{it}^4x_{is}^4 - \frac{1}{288}(x_{it}^4x_{is}^3 + x_{it}^3x_{is}^4) \right. \\ \left. + \frac{1}{1728}(6x_{it}^4x_{is}^2 + 16x_{it}^3x_{is}^3 + 6x_{it}^2x_{is}^4) - \frac{1}{576}(x_{it}^4x_{is}^2 + 6x_{it}^3x_{is}^2 + 6x_{it}^2x_{is}^3 + x_{it}x_{is}^4) \right. \\ \left. + \frac{1}{2880}(x_{it}^4 + 16x_{it}^3x_{is} + 36x_{it}^2x_{is}^2 + 16x_{it}x_{is}^3 + x_{is}^4) - \frac{1}{1728}(x_{it}^3 + 6x_{it}^2x_{is} + 6x_{it}x_{is}^2 + x_{is}^3) \right. \\ \left. + \frac{1}{4032}(6x_{it}^2 + 16x_{it}x_{is} + 6x_{is}^2) - \frac{1}{1152}(x_{it} + x_{is}) \right], t = 1, 2, \dots, T$$

#### Lemma 4.2

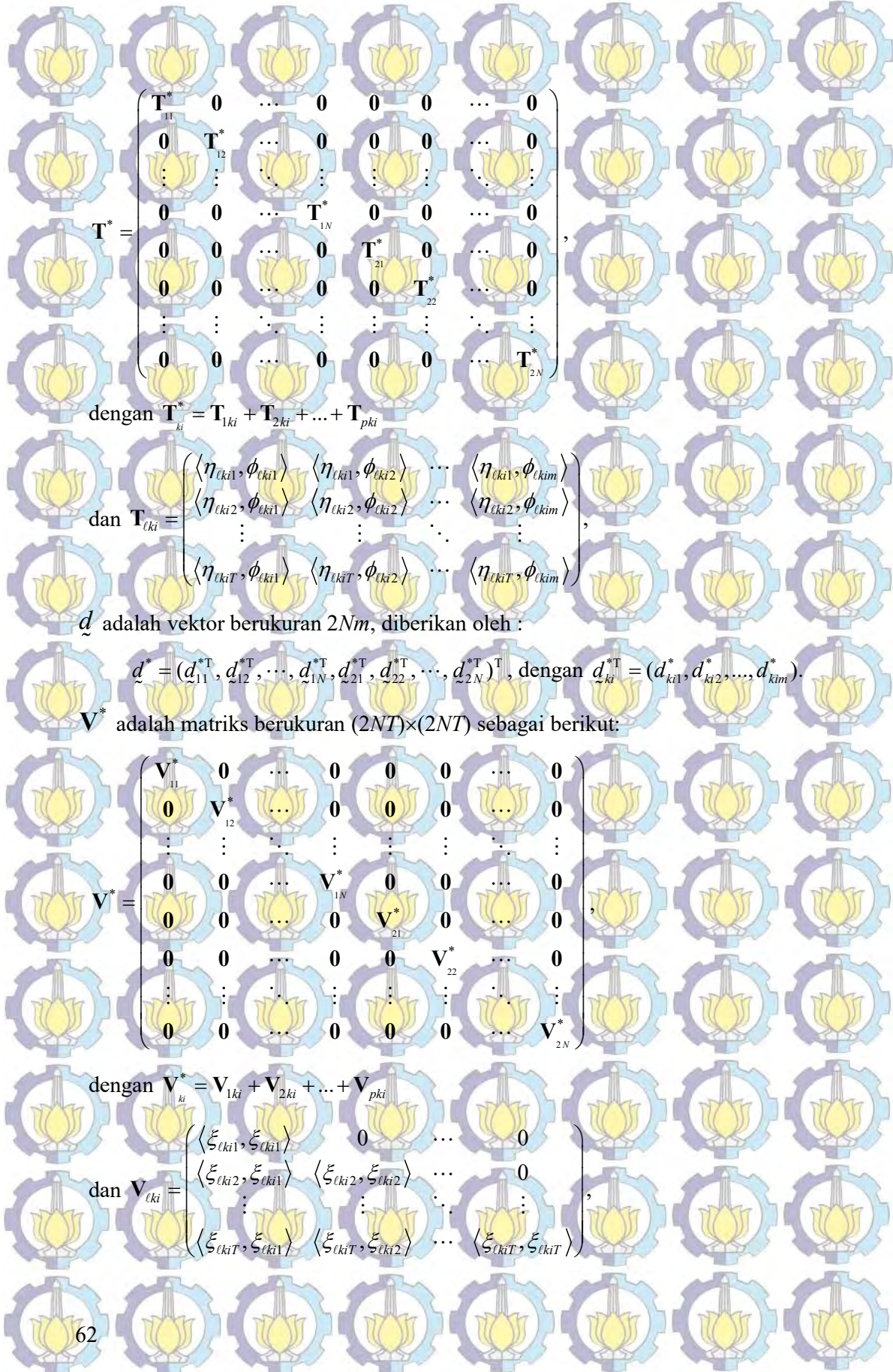
Jika diberikan data berpasangan  $(x_{1it}, x_{2it}, \dots, x_{pit}, y_{1it}, y_{2it})$   $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $t = 1, 2, \dots, T$  mengikuti model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal seperti diberikan dalam persamaan (4.2), maka bentuk fungsi regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal adalah:

$$\underline{f} = \mathbf{T}^* \underline{d}^* + \mathbf{V}^* \underline{c}^*,$$

dengan

$\mathbf{T}^*$  adalah matriks berukuran  $(2NT) \times (2Nm)$  sebagai berikut:





$$\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11}^* & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{12}^* & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}_{1N}^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{T}_{21}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{T}_{22}^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}_{2N}^* \end{pmatrix},$$

dengan  $\mathbf{T}_{ki}^* = \mathbf{T}_{1ki} + \mathbf{T}_{2ki} + \dots + \mathbf{T}_{pki}$

$$\text{dan } \mathbf{T}_{\ell ki} = \begin{pmatrix} \langle \eta_{\ell ki}, \phi_{\ell ki1} \rangle & \langle \eta_{\ell ki}, \phi_{\ell ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{\ell ki}, \phi_{\ell kim} \rangle \\ \langle \eta_{\ell ki2}, \phi_{\ell ki1} \rangle & \langle \eta_{\ell ki2}, \phi_{\ell ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{\ell ki2}, \phi_{\ell kim} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_{\ell kiT}, \phi_{\ell ki1} \rangle & \langle \eta_{\ell kiT}, \phi_{\ell ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{\ell kiT}, \phi_{\ell kim} \rangle \end{pmatrix},$$

$\tilde{d}$  adalah vektor berukuran  $2Nm$ , diberikan oleh :

$$\tilde{d}^* = (d_{11}^{*T}, d_{12}^{*T}, \dots, d_{1N}^{*T}, d_{21}^{*T}, d_{22}^{*T}, \dots, d_{2N}^{*T})^T, \text{ dengan } d_{ki}^{*T} = (d_{ki1}^*, d_{ki2}^*, \dots, d_{kim}^*).$$

$\mathbf{V}^*$  adalah matriks berukuran  $(2NT) \times (2NT)$  sebagai berikut:

$$\mathbf{V}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11}^* & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_{12}^* & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{V}_{1N}^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{V}_{21}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{V}_{22}^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{V}_{2N}^* \end{pmatrix},$$

dengan  $\mathbf{V}_{ki}^* = \mathbf{V}_{1ki} + \mathbf{V}_{2ki} + \dots + \mathbf{V}_{pki}$

$$\text{dan } \mathbf{V}_{\ell ki} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{\ell ki}, \xi_{\ell ki1} \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle \xi_{\ell ki2}, \xi_{\ell ki1} \rangle & \langle \xi_{\ell ki2}, \xi_{\ell ki2} \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{\ell kiT}, \xi_{\ell ki1} \rangle & \langle \xi_{\ell kiT}, \xi_{\ell ki2} \rangle & \dots & \langle \xi_{\ell kiT}, \xi_{\ell kim} \rangle \end{pmatrix},$$



$\underline{c}$  adalah vektor berukuran  $2NT$ , diberikan oleh :

$$\underline{c}^* = (\underline{c}_{11}^{*T}, \underline{c}_{12}^{*T}, \dots, \underline{c}_{1N}^{*T}, \underline{c}_{21}^{*T}, \underline{c}_{22}^{*T}, \dots, \underline{c}_{2N}^{*T})^T, \text{ dengan } \underline{c}_{ki}^{*T} = (c_{ki1}^*, c_{ki2}^*, \dots, c_{kiT}^*).$$

**Bukti:**

Perluasan persamaan (4.11) pada Lemma 4.1 untuk  $x_{it}$ ;  $\ell = 1, 2, \dots, p$ , jika  $f_{ki}(x_{it})$

diganti dengan  $\sum_{\ell=1}^p f_{ki}(x_{it})$ , maka vektor dari fungsi  $\underline{f}$  dalam bentuk :

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{111} \underline{d}_{11} + \mathbf{T}_{211} \underline{d}_{11} + \dots + \mathbf{T}_{p11} \underline{d}_{11} + \mathbf{V}_{111} \underline{c}_{11} + \mathbf{V}_{211} \underline{c}_{11} + \dots + \mathbf{V}_{p11} \underline{c}_{11} \\ \mathbf{T}_{112} \underline{d}_{12} + \mathbf{T}_{211} \underline{d}_{12} + \dots + \mathbf{T}_{p12} \underline{d}_{12} + \mathbf{V}_{111} \underline{c}_{12} + \mathbf{V}_{211} \underline{c}_{12} + \dots + \mathbf{V}_{p11} \underline{c}_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{11N} \underline{d}_{1N} + \mathbf{T}_{21N} \underline{d}_{1N} + \dots + \mathbf{T}_{p1N} \underline{d}_{1N} + \mathbf{V}_{11N} \underline{c}_{1N} + \mathbf{V}_{21N} \underline{c}_{1N} + \dots + \mathbf{V}_{p11} \underline{c}_{1N} \\ \mathbf{T}_{121} \underline{d}_{21} + \mathbf{T}_{221} \underline{d}_{21} + \dots + \mathbf{T}_{p21} \underline{d}_{21} + \mathbf{V}_{121} \underline{c}_{21} + \mathbf{V}_{221} \underline{c}_{21} + \dots + \mathbf{V}_{p21} \underline{c}_{21} \\ \mathbf{T}_{122} \underline{d}_{22} + \mathbf{T}_{221} \underline{d}_{22} + \dots + \mathbf{T}_{p22} \underline{d}_{22} + \mathbf{V}_{121} \underline{c}_{22} + \mathbf{V}_{221} \underline{c}_{22} + \dots + \mathbf{V}_{p21} \underline{c}_{22} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{12N} \underline{d}_{2N} + \mathbf{T}_{22N} \underline{d}_{2N} + \dots + \mathbf{T}_{p2N} \underline{d}_{2N} + \mathbf{V}_{12N} \underline{c}_{2N} + \mathbf{V}_{22N} \underline{c}_{2N} + \dots + \mathbf{V}_{p11} \underline{c}_{2N} \end{pmatrix}$$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11}^* & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{12}^* & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{T}_{1N}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{21}^* & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22}^* & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{T}_{2N}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{d}_{11}^* \\ \underline{d}_{12}^* \\ \vdots \\ \underline{d}_{1N}^* \\ \underline{d}_{21}^* \\ \underline{d}_{22}^* \\ \vdots \\ \underline{d}_{2N}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11}^* & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{12}^* & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{V}_{1N}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{V}_{21}^* & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{V}_{22}^* & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{V}_{2N}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{c}_{11}^* \\ \underline{c}_{12}^* \\ \vdots \\ \underline{c}_{1N}^* \\ \underline{c}_{21}^* \\ \underline{c}_{22}^* \\ \vdots \\ \underline{c}_{2N}^* \end{pmatrix}$$

$$\underline{f} = \mathbf{T}^* \underline{d}^* + \mathbf{V}^* \underline{c}^*, \quad (4.15)$$

dengan

$\mathbf{T}^*$  adalah matriks berukuran  $(2NT) \times (2Nm)$  sebagai berikut:



$$\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11}^* & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{12}^* & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}_{1N}^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{T}_{21}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{T}_{22}^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}_{2N}^* \end{pmatrix},$$

dengan  $\mathbf{T}_{ki}^* = \mathbf{T}_{1ki} + \mathbf{T}_{2ki} + \dots + \mathbf{T}_{pki}$ ,

$$\text{dan } \mathbf{T}_{\ell ki} = \begin{pmatrix} \langle \eta_{\ell ki}, \phi_{\ell ki1} \rangle & \langle \eta_{\ell ki}, \phi_{\ell ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{\ell ki}, \phi_{\ell kim} \rangle \\ \langle \eta_{\ell ki2}, \phi_{\ell ki1} \rangle & \langle \eta_{\ell ki2}, \phi_{\ell ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{\ell ki2}, \phi_{\ell kim} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_{\ell kiT}, \phi_{\ell ki1} \rangle & \langle \eta_{\ell kiT}, \phi_{\ell ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{\ell kiT}, \phi_{\ell kim} \rangle \end{pmatrix},$$

$\underline{d}$  adalah vektor berukuran  $2Nm$ , diberikan oleh :

$$\underline{d}^* = (d_{11}^{*T}, d_{12}^{*T}, \dots, d_{1N}^{*T}, d_{21}^{*T}, d_{22}^{*T}, \dots, d_{2N}^{*T})^T, \text{ dengan } d_{ki}^{*T} = (d_{ki1}^*, d_{ki2}^*, \dots, d_{kim}^*).$$

$\mathbf{V}^*$  adalah matriks berukuran  $(2NT) \times (2NT)$  sebagai berikut:

$$\mathbf{V}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11}^* & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_{12}^* & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{V}_{1N}^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{V}_{21}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{V}_{22}^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{V}_{2N}^* \end{pmatrix},$$

dengan  $\mathbf{V}_{ki}^* = \mathbf{V}_{1ki} + \mathbf{V}_{2ki} + \dots + \mathbf{V}_{pki}$

$$\text{dan } \mathbf{V}_{\ell ki} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{\ell ki}, \xi_{\ell ki1} \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle \xi_{\ell ki2}, \xi_{\ell ki1} \rangle & \langle \xi_{\ell ki2}, \xi_{\ell ki2} \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{\ell kiT}, \xi_{\ell ki1} \rangle & \langle \xi_{\ell kiT}, \xi_{\ell ki2} \rangle & \dots & \langle \xi_{\ell kiT}, \xi_{\ell kim} \rangle \end{pmatrix},$$



$\zeta$  adalah vektor berukuran  $2NT$ , diberikan oleh :

$$\zeta^* = (\zeta_{11}^{*T}, \zeta_{12}^{*T}, \dots, \zeta_{1N}^{*T}, \zeta_{21}^{*T}, \zeta_{22}^{*T}, \dots, \zeta_{2N}^{*T})^T, \text{ dengan } \zeta_{ki}^{*T} = (c_{ki1}^*, c_{ki2}^*, \dots, c_{kiT}^*). \blacksquare$$

#### Teorema 4.1

Jika diberikan data berpasangan mengikuti model regresi nonparametrik birespon melibatkan prediktor tunggal pada data longitudinal yang memenuhi bentuk fungsi regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal seperti disajikan pada Lemma 4.1, dengan asumsi  $E(\varepsilon) = \mathbf{0}$  dan  $\text{Var}(\varepsilon) = \Sigma$ , maka estimator *spline* yang meminimumkan PWLS

$$\min_{f_{ki} \in W_2^m[a_{ki}, b_{ki}], k=1,2, i=1,2,\dots,N} \left\{ M^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{f})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{f}) + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} [f_{ki}^{(m)}(x_{it})]^2 dx_{it} \right\}$$

adalah  $\hat{f}_2 = \mathbf{A}_\lambda \mathbf{y}$ , dengan :

$$\mathbf{A}_\lambda = \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} + \mathbf{V} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1}].$$

$$\hat{\mathbf{U}} = \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{V} + M \mathbf{A}.$$

#### Bukti:

Mengingat Persamaan (4.12) yaitu fungsi  $\mathbf{f} = \mathbf{T}\mathbf{d} + \mathbf{V}\zeta$ , maka model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal (4.1) dapat ditulis menjadi :

$$\mathbf{y} = \mathbf{f} + \varepsilon = \mathbf{T}\mathbf{d} + \mathbf{V}\zeta + \varepsilon.$$

Dalam analisis regresi nonparametrik adalah memperoleh estimator kurva regresi  $\mathbf{f}$ . Untuk tujuan estimasi ini, akan digunakan pendekatan *Reproducing Kernel Hilbert Space* (RKHS). Ingin diperoleh estimasi  $\mathbf{f}$  yang memenuhi optimasi PWLS:

$$\min_{\substack{f_{ki} \in \mathcal{H} \\ k=1,2; i=1,2,\dots,N}} \left\{ \left\| \Sigma^{-\frac{1}{2}} \zeta \right\|^2 \right\} = \min_{\substack{f_{ki} \in \mathcal{H} \\ k=1,2; i=1,2,\dots,N}} \left\{ \left\| \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{y} - \mathbf{f}) \right\|^2 \right\}, \quad (4.16)$$

dengan kendala-kendala :

$$\|f_{ki}\|^2 < \gamma_{ki}, \quad \gamma_{ki} \geq 0. \quad (4.17)$$



Selanjutnya digunakan ruang fungsi  $\mathcal{H} = W_2^m[a_{ki}, b_{ki}]$  adalah ruang *Sobolev* order-2 yang didefinisikan sebagai berikut :

$$W_2^m[a_{ki}, b_{ki}] = \left\{ f_{ki} : \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} [f_{ki}^{(m)}(x_{it})]^2 dx_{it} < \infty \right\},$$

dengan  $a_{ki} \leq x_{it} \leq b_{ki}$  dan  $i = 1, 2, \dots, N$ . Berdasarkan ruang tersebut, ditentukan *norm* untuk setiap fungsi  $f_{ki} \in W_2^m[a_{ki}, b_{ki}]$ , sebagai berikut :

$$\|f_{ki}\|^2 = \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} [f_{ki}^{(m)}(x_{it})]^2 dx_{it}.$$

Optimasi dengan kendala pada Persamaan (4.16) dapat ditulis menjadi :

$$\min_{\substack{f_{ki} \in W_2^m[a_{ki}, b_{ki}], \\ k=1, 2; i=1, 2, \dots, N}} \left\{ \|\Sigma^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varepsilon}\|^2 \right\} = \min_{\substack{f_{ki} \in W_2^m[a_{ki}, b_{ki}], \\ k=1, 2; i=1, 2, \dots, N}} \left\{ \|\Sigma^{-\frac{1}{2}}(y - \tilde{f})\|^2 \right\}, \quad (4.18)$$

dengan kendala-kendala pada persamaan (4.17) menjadi:

$$\int_{a_{ki}}^{b_{ki}} [f_{ki}^{(m)}(x_{it})]^2 dx_{it} < \gamma_{ki}, \quad \gamma_{ki} \geq 0. \quad (4.19)$$

Optimasi terboboti (4.18) dengan kendala (4.19) ekuivalen dengan menyelesaikan optimasi *Penalized Weighted Least Square* (PWLS) :

$$\min_{\substack{f_{ki} \in W_2^m[a_{ki}, b_{ki}], \\ k=1, 2; i=1, 2, \dots, N}} \left\{ M^{-1}(y - \tilde{f})^T \Sigma^{-1}(y - \tilde{f}) + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} [f_{ki}^{(m)}(x_{it})]^2 dx_{it} \right\}, \quad (4.20)$$

dengan  $M = 2NT$  dan  $\lambda_{ki}$  merupakan parameter penghalus (*smoothing parameter*) yang mengontrol antara *Goodness of fit* :

$$M^{-1}(y - \tilde{f})^T \Sigma^{-1}(y - \tilde{f}),$$

dan *penalty* :

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} [f_{ki}^{(m)}(x_{it})]^2 dx_{it}.$$

Untuk menyelesaikan optimasi pada persamaan (4.20) terlebih dahulu diuraikan komponen *penalty*:



$$\int_{a_{11}}^{b_{11}} \left[ f_{11}^{(m)}(x_{11}) \right]^2 dx_{11} = \|P_1 f_{11}\|^2$$

$$= \langle P_1 f_{11}, P_1 f_{11} \rangle$$

$P_1$  adalah proyeksi ortogonal  $f_{11}$  ke  $\mathcal{H}_1$  dalam  $W_2^m[a_{ki}, b_{ki}]$ .

$$\int_{a_{11}}^{b_{11}} \left[ f_{11}^{(m)}(x_{11}) \right]^2 dx_{11} = \left\langle P_1 \left( \phi_{11}^T d_{11} + \xi_{11}^T \mathcal{L}_{11} \right), P_1 \left( \phi_{11}^T d_{11} + \xi_{11}^T \mathcal{L}_{11} \right) \right\rangle$$

$$= \left\langle \xi_{11}^T \mathcal{L}_{11}, \xi_{11}^T \mathcal{L}_{11} \right\rangle$$

$$= (\xi_{11}^T \mathcal{L}_{11})^T (\xi_{11}^T \mathcal{L}_{11})$$

$$= \mathcal{L}_{11}^T (\xi_{11} \xi_{11}^T) \mathcal{L}_{11}$$

$$= (c_{111} \ c_{112} \ \dots \ c_{11T}) \begin{pmatrix} \xi_{111} \\ \xi_{112} \\ \vdots \\ \xi_{11T} \end{pmatrix} (\xi_{111} \ \xi_{112} \ \dots \ \xi_{11T}) \begin{pmatrix} c_{111} \\ c_{112} \\ \vdots \\ c_{11T} \end{pmatrix}$$

$$= (c_{111} \ c_{112} \ \dots \ c_{11T}) \begin{pmatrix} \langle \xi_{111}, \xi_{111} \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle \xi_{112}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{112}, \xi_{112} \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{11T}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{11T}, \xi_{112} \rangle & \dots & \langle \xi_{11T}, \xi_{11T} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{111} \\ c_{112} \\ \vdots \\ c_{11T} \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{L}_{11}^T \mathbf{V}_{11} \mathcal{L}_{11}.$$

Akibatnya :

$$\lambda_{11} \int_{a_{11}}^{b_{11}} \left[ f_{11}^{(m)}(x_{11}) \right]^2 dx_{11} = \lambda_{11} \mathcal{L}_{11}^T \mathbf{V}_{11} \mathcal{L}_{11}. \quad (4.21)$$

Dengan cara yang serupa diperoleh :

$$\lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} \left[ f_{ki}^{(m)}(x_{ki}) \right]^2 dx_{ki} = \lambda_{ki} \mathcal{L}_{ki}^T \mathbf{V}_{ki} \mathcal{L}_{ki}. \quad (4.22)$$

Berdasarkan Persamaan (4.22), diperoleh nilai *penalty* :

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} \left[ f_{ki}^{(m)}(x_{ki}) \right]^2 dx_{ki} = \lambda_{11} \mathcal{L}_{11}^T \mathbf{V}_{11} \mathcal{L}_{11} + \lambda_{12} \mathcal{L}_{12}^T \mathbf{V}_{12} \mathcal{L}_{12} + \dots + \lambda_{1N} \mathcal{L}_{1N}^T \mathbf{V}_{1N} \mathcal{L}_{1N} +$$

$$\lambda_{21} \mathcal{L}_{21}^T \mathbf{V}_{21} \mathcal{L}_{21} + \lambda_{22} \mathcal{L}_{22}^T \mathbf{V}_{22} \mathcal{L}_{22} + \dots + \lambda_{2N} \mathcal{L}_{2N}^T \mathbf{V}_{2N} \mathcal{L}_{2N}$$

$$= \mathcal{L}_{11}^T \lambda_{11} \mathbf{V}_{11} \mathcal{L}_{11} + \mathcal{L}_{12}^T \lambda_{12} \mathbf{V}_{12} \mathcal{L}_{12} + \dots + \mathcal{L}_{1N}^T \lambda_{1N} \mathbf{V}_{1N} \mathcal{L}_{1N}$$

$$\mathcal{L}_{21}^T \lambda_{21} \mathbf{V}_{21} \mathcal{L}_{21} + \mathcal{L}_{22}^T \lambda_{22} \mathbf{V}_{22} \mathcal{L}_{22} + \dots + \mathcal{L}_{2N}^T \lambda_{2N} \mathbf{V}_{2N} \mathcal{L}_{2N}$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \zeta_{11}^T & \zeta_{12}^T & \dots & \zeta_{1N}^T & \zeta_{21}^T & \zeta_{22}^T & \dots & \zeta_{2N}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_{12} \mathbf{V}_{12} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \lambda_{1N} \mathbf{V}_{1N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \lambda_{21} \mathbf{V}_{21} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_{22} \mathbf{V}_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \lambda_{2N} \mathbf{V}_{2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{11} \\ \zeta_{12} \\ \vdots \\ \zeta_{1N} \\ \zeta_{21} \\ \zeta_{22} \\ \vdots \\ \zeta_{2N} \end{pmatrix} \\
&\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} \left[ f_{ki}^{(m)}(x_{it}) \right]^2 dx_{it} = \zeta^T \Lambda \mathbf{V} \zeta, \quad (4.23)
\end{aligned}$$

dengan  $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \mathbf{I}_T & \mathbf{0}_T & \dots & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \dots & \mathbf{0}_T \\ \mathbf{0}_T & \lambda_{12} \mathbf{I}_T & \dots & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \dots & \mathbf{0}_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \dots & \lambda_{1N} \mathbf{I}_T & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \dots & \mathbf{0}_T \\ \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \dots & \mathbf{0}_T & \lambda_{21} \mathbf{I}_T & \mathbf{0}_T & \dots & \mathbf{0}_T \\ \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \dots & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \lambda_{22} \mathbf{I}_T & \dots & \mathbf{0}_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \dots & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \dots & \lambda_{2N} \mathbf{I}_T \end{bmatrix}$ .

Merujuk hasil persamaan (4.12), maka diperoleh *Goodness of fit* pada optimasi PWLS (4.20) dapat ditulis menjadi :

$$M^{-1}(\tilde{y} - \tilde{f})^T \Sigma^{-1}(\tilde{y} - \tilde{f}) = M^{-1}(\tilde{y} - \mathbf{T}\tilde{d} - \mathbf{V}\tilde{\zeta})^T \Sigma^{-1}(\tilde{y} - \mathbf{T}\tilde{d} - \mathbf{V}\tilde{\zeta}). \quad (4.24)$$

Penyelesaian optimasi PWLS dengan mengkombinasikan *goodness of fit* (4.24) dan *penalty* (4.23), disajikan dalam bentuk :

$$\begin{aligned}
&\min_{f_{ki} \in W_2^m(a_i, b_i), k=1,2; i=1,2,\dots,N} \left\{ M^{-1}(\tilde{y} - \tilde{f})^T \Sigma^{-1}(\tilde{y} - \tilde{f}) + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} \left[ f_{ki}^{(m)}(x_{it}) \right]^2 dx_{it} \right\} \\
&= \min_{\substack{\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^{2NT} \\ \tilde{d} \in \mathbb{R}^{2Nm}}} \left\{ M^{-1}(\tilde{y} - \mathbf{T}\tilde{d} - \mathbf{V}\tilde{\zeta})^T \Sigma^{-1}(\tilde{y} - \mathbf{T}\tilde{d} - \mathbf{V}\tilde{\zeta}) + \zeta^T \Lambda \mathbf{V} \zeta \right\} \\
&= \min_{\substack{\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^{2NT} \\ \tilde{d} \in \mathbb{R}^{2Nm}}} \left\{ \left( (\tilde{y} - \mathbf{T}\tilde{d} - \mathbf{V}\tilde{\zeta})^T \Sigma^{-1}(\tilde{y} - \mathbf{T}\tilde{d} - \mathbf{V}\tilde{\zeta}) + \zeta^T \Lambda \mathbf{V} \zeta \right) M^{-1} \right\} \\
&= \min_{\substack{\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^{2NT} \\ \tilde{d} \in \mathbb{R}^{2Nm}}} \left\{ \left[ (\tilde{y}^T \Sigma^{-1} \tilde{y} - \tilde{y}^T \Sigma^{-1} \mathbf{T} \tilde{d} - \tilde{y}^T \Sigma^{-1} \mathbf{V} \tilde{\zeta} - \tilde{d}^T \mathbf{T}^T \Sigma^{-1} \tilde{y} + \tilde{d}^T \mathbf{T}^T \Sigma^{-1} \mathbf{T} \tilde{d} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \tilde{d}^T \mathbf{T}^T \Sigma^{-1} \mathbf{V} \tilde{\zeta} - \tilde{\zeta}^T \mathbf{V}^T \Sigma^{-1} \tilde{y} + \tilde{\zeta}^T \mathbf{V}^T \Sigma^{-1} \mathbf{T} \tilde{d} + \tilde{\zeta}^T \mathbf{V}^T \Sigma^{-1} \mathbf{V} \tilde{\zeta} + \zeta^T \Lambda \mathbf{V} \zeta \right] M^{-1} \right\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \min_{\substack{\underline{c} \in \mathbb{R}^{2NT} \\ \underline{d} \in \mathbb{R}^{2Nm}}} \left\{ \left[ (\underline{y}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{y} - 2 \underline{d}^T \underline{T}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{y} - 2 \underline{c}^T \underline{V}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{y} + \underline{d}^T \underline{T}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{T} \underline{d} + \underline{d}^T \underline{T}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{V} \underline{c} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \underline{c}^T \underline{V}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{T} \underline{d} + \underline{c}^T (\underline{V}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{V} + M \underline{\Lambda} \underline{V}) \underline{c} \right] M^{-1} \right\} \\
&= \min_{\substack{\underline{c} \in \mathbb{R}^{2NT} \\ \underline{d} \in \mathbb{R}^{2Nm}}} \{ Q(\underline{c}, \underline{d}) \}. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Penyelesaian optimasi (4.25), diperoleh dengan cara melakukan turunan parsial  $Q(\underline{c}, \underline{d})$  berturut-turut terhadap  $\underline{c}$  dan  $\underline{d}$ , kemudian hasilnya disamakan dengan nol. Turunan parsial disajikan sebagai berikut :

$$\frac{\partial Q(\underline{c}, \underline{d})}{\partial \underline{c}} = 0,$$

memberikan hasil :

$$-2 \underline{V}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{y} + 2 \underline{V}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{T} \underline{d} + 2 (\underline{V}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{V} + M \underline{\Lambda} \underline{V}) \hat{\underline{c}} = 0.$$

$$\underline{V}^T \{ -\underline{\Sigma}^{-1} \underline{y} + \underline{\Sigma}^{-1} \underline{T} \underline{d} + [\underline{\Sigma}^{-1} \underline{V} + M \underline{\Lambda} \underline{V}] \hat{\underline{c}} \} = 0.$$

$$-\underline{\Sigma}^{-1} \underline{y} + \underline{\Sigma}^{-1} \underline{T} \underline{d} + [\underline{\Sigma}^{-1} \underline{V} + M \underline{\Lambda} \underline{V}] \hat{\underline{c}} = 0. \tag{4.26}$$

Misalkan diberikan matriks  $\underline{U}$  sebagai berikut:

$$\underline{U} = \underline{\Sigma}^{-1} \underline{V} + M \underline{\Lambda} \underline{V}.$$

maka Persamaan (4.27) dapat ditulis menjadi :

$$-\underline{\Sigma}^{-1} \underline{y} + \underline{\Sigma}^{-1} \underline{T} \underline{d} + \underline{U} \hat{\underline{c}} = 0.$$

$$\underline{U} \hat{\underline{c}} = \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{y} - \underline{T} \underline{d}) \tag{4.27}$$

Persamaan (4.28) digandakan dari kiri dengan  $\underline{U}^{-1}$  diperoleh persamaan :

$$\hat{\underline{c}} = \underline{U}^{-1} \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{y} - \underline{T} \underline{d}) \tag{4.28}$$

Selanjutnya, turunan parsial :

$$\frac{\partial Q(\underline{c}, \underline{d})}{\partial \underline{d}} = 0,$$

memberikan hasil :

$$-\underline{T}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{y} + \underline{T}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{T} \underline{d} + \underline{T}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{V} \hat{\underline{c}} = 0$$

Penjabaran dari Persamaan (4.30), diperoleh persamaan sebagai berikut:



$$\begin{aligned}
& -\mathbf{T}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{T}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{T} \hat{\tilde{\mathbf{d}}} + \mathbf{T}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V} \{ \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T} \hat{\tilde{\mathbf{d}}}) \} = 0 \\
& -\mathbf{T}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{T}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{T} \hat{\tilde{\mathbf{d}}} + \mathbf{T}^T [\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{U}^{-1}] \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T} \hat{\tilde{\mathbf{d}}}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Mengingat  $\mathbf{U} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V} + \mathbf{M} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{I}$ , maka  $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{U} - \mathbf{M} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{I})$ , akibatnya diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\mathbf{V} \mathbf{U}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{U} - \mathbf{M} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{I}) \mathbf{U}^{-1}$$

$$\mathbf{V} \mathbf{U}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{I} - \mathbf{M} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^{-1}).$$

Dengan mengkalikan persamaan di atas dengan  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$  didapat :

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{M} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^{-1}.$$

Persamaan ini disubstitusikan dalam Persamaan (4.29) diperoleh persamaan :

$$-\mathbf{T}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{T}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{T} \hat{\tilde{\mathbf{d}}} + \mathbf{T}^T [\mathbf{I} - \mathbf{M} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^{-1}] \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T} \hat{\tilde{\mathbf{d}}}) = 0$$

Apabila persamaan di atas dijabarkan, diperoleh persamaan :

$$-\mathbf{M} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{M} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{T} \hat{\tilde{\mathbf{d}}} = 0.$$

$$\mathbf{M} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{T} \hat{\tilde{\mathbf{d}}} = \mathbf{M} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{y}}.$$

Kedua ruas persamaan ini dikalikan dengan  $(\mathbf{M} \boldsymbol{\Lambda})^{-1}$  kemudian disederhanakan, diperoleh :

$$\hat{\tilde{\mathbf{d}}} = (\mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{y}}. \tag{4.30}$$

Persamaan (4.28) disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.30) diperoleh :

$$\begin{aligned}
\hat{\tilde{\mathbf{c}}} &= \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T} [(\mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{y}}]) \\
&= \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}] \tilde{\mathbf{y}}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Berdasarkan Persamaan (4.30) dan Persamaan (4.31), diperoleh estimator untuk kurva regresi nonparametrik bi-respon untuk data longitudinal yang melibatkan prediktor tunggal sebagai berikut:



$$\hat{\tilde{f}}_{\tilde{\lambda}} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{11, \lambda_{11}} \\ \hat{f}_{12, \lambda_{12}} \\ \vdots \\ \hat{f}_{1N, \lambda_{1N}} \\ \hat{f}_{21, \lambda_{21}} \\ \hat{f}_{22, \lambda_{22}} \\ \vdots \\ \hat{f}_{2N, \lambda_{2N}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{V}\tilde{\mathbf{e}}$$

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{f}}_{\tilde{\lambda}} &= \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{V} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1}] \mathbf{y} \\ \hat{\tilde{f}}_{\tilde{\lambda}} &= \{\mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} + \mathbf{V} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1}]\} \mathbf{y} \\ \hat{\tilde{f}}_{\tilde{\lambda}} &= \mathbf{A}_{\tilde{\lambda}} \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

dengan

$$\mathbf{A}_{\tilde{\lambda}} = \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} + \mathbf{V} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1}].$$

Matriks varians kovarians *error*  $\hat{\mathbf{\Sigma}}$  akan disajikan pada bagian berikutnya (subbab 4.2), sehingga pada Teorema 4.1 berikut, menggunakan  $\hat{\mathbf{\Sigma}}$  serta  $\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \mathbf{V} + M \mathbf{\Lambda}$ , sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\mathbf{d}}} &= (\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \mathbf{y}, \\ \hat{\tilde{\mathbf{e}}} &= \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}] \mathbf{y}. \end{aligned}$$

$$\hat{\tilde{f}}_{\tilde{\lambda}} = \mathbf{A}_{\tilde{\lambda}} \mathbf{y},$$

dengan

$$\mathbf{A}_{\tilde{\lambda}} = \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1} + \mathbf{V} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}]. \blacksquare$$

**Teorema 4.2**

Jika diberikan data berpasangan mengikuti model regresi nonparametrik birespon melibatkan  $p$  prediktor pada data longitudinal yang memenuhi bentuk fungsi regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal seperti disajikan pada Lemma 4.2,



dengan asumsi  $E(\varepsilon)=0$  dan  $\text{Var}(\varepsilon)=\Sigma$ , maka estimator *spline* yang meminimumkan PWLS

$$\min_{f_{ki} \in W_2^m[a_{ki}, b_{ki}], k=1,2,\dots,p; i=1,2,\dots,N} \left\{ M^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}) + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \left[ \sum_{\ell=1}^p \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} [f_{ki}^{(m)}(x_{\ell i})]^2 dx_{\ell i} \right] \right\}$$

adalah  $\hat{f}_{\lambda} = \mathbf{A}_{\lambda}^* \mathbf{y}$ , dengan :

$$\mathbf{A}_{\lambda}^* = \mathbf{T}^* (\mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} + \mathbf{V}^* \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^* (\mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma} \mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}],$$

$$\hat{\mathbf{U}} = \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{V} + \mathbf{M} \Lambda.$$

**Bukti:**

Mengingat Persamaan (4.15) yaitu fungsi  $\mathbf{f} = \mathbf{T}^* \mathbf{d}^* + \mathbf{V}^* \mathbf{c}^*$ , maka model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal (4.2) dapat ditulis menjadi :

$$\mathbf{y} = \mathbf{f} + \varepsilon = \mathbf{T}^* \mathbf{d}^* + \mathbf{V}^* \mathbf{c}^* + \varepsilon,$$

Dalam analisis regresi nonparametrik adalah memperoleh estimator kurva regresi  $\mathbf{f}$ . Untuk tujuan estimasi ini, akan digunakan pendekatan *Reproducing Kernel Hilbert Space* (RKHS). Estimasi  $\mathbf{f}$  diperoleh dengan menyelesaikan optimasi PWLS menggunakan ruang fungsi *Sobolev* order-2 yang didefinisikan sebagai berikut :

$$W_2^m[a_{ki}, b_{ki}] = \left\{ f_{ki} : \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} [f_{ki}^{(m)}(x_{\ell i})]^2 dx_{\ell i} < \infty \right\},$$

dengan  $a_{ki} \leq x_{\ell i} \leq b_{ki}$  dan  $i = 1, 2, \dots, N$ . Berdasarkan ruang tersebut, ditentukan *norm* untuk setiap fungsi  $f_{ki} \in W_2^m[a_{ki}, b_{ki}]$ , sebagai berikut :

$$\|f_{ki}\|^2 = \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} [f_{ki}^{(m)}(x_{\ell i})]^2 dx_{\ell i}.$$

Optimasi dengan kendala pada Persamaan (4.18) dapat ditulis menjadi :

$$\min_{\substack{f_{ki} \in W_2^m[a_{ki}, b_{ki}] \\ k=1,2; i=1,2,\dots,N}} \left\{ \|\Sigma^{-\frac{1}{2}} \varepsilon\|^2 \right\} = \min_{\substack{f_{ki} \in W_2^m[a_{ki}, b_{ki}] \\ k=1,2; i=1,2,\dots,N}} \left\{ \|\Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{y} - \mathbf{f})\|^2 \right\}, \quad (4.33)$$

dengan kendala-kendala pada persamaan (4.19) menjadi:



$$\int_{a_{ki}}^{b_{ki}} \left[ \sum_{\ell=1}^p f_{ki}^{(m)}(x_{\ell i}) \right]^2 dx_{\ell i} < \gamma_{ki}, \quad \gamma_{ki} \geq 0. \quad (4.34)$$

Optimasi terboboti (4.33) dengan kendala (4.34) ekuivalen dengan menyelesaikan optimasi *Penalized Weighted Least Square* (PWLS) :

$$\min_{\substack{f_{ki} \in W_2^m[a_{ki}, b_{ki}], \\ k=1,2; i=1,2,\dots,N}} \left\{ M^{-1}(\underline{y} - \underline{f})^T \Sigma^{-1}(\underline{y} - \underline{f}) + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} \left[ \sum_{\ell=1}^p f_{ki}^{(m)}(x_{\ell i}) \right]^2 dx_{\ell i} \right\}, \quad (4.35)$$

dengan  $M = 2NT$  dan  $\lambda_{ki}$  merupakan parameter penghalus (*smoothing parameter*) yang mengontrol antara *Goodness of fit* :

$$M^{-1}(\underline{y} - \underline{f})^T \Sigma^{-1}(\underline{y} - \underline{f}),$$

dan *penalty* :

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} \left[ \sum_{\ell=1}^p f_{ki}^{(m)}(x_{\ell i}) \right]^2 dx_{\ell i}.$$

Untuk menyelesaikan optimasi pada persamaan (4.21) terlebih dahulu diuraikan komponen *penalty* ( $P_1$  adalah proyeksi ortogonal  $f_{11}$  ke  $\mathcal{H}_1$  dalam  $W_2^m[a_{k1}, b_{k1}]$ ).

$$\begin{aligned} \int_{a_{11}}^{b_{11}} \left[ \sum_{\ell=1}^p f_{11}^{(m)}(x_{\ell 1}) \right]^2 dx_{\ell 1} &= \|P_1 f_{11}\|^2 \\ &= \langle P_1 f_{11}, P_1 f_{11} \rangle \\ &= \left\langle P_1 \left( \phi_{11}^T d_{11}^* + \xi_{11}^T \mathcal{C}_{11}^* \right), P_1 \left( \phi_{11}^T d_{11}^* + \xi_{11}^T \mathcal{C}_{11}^* \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \xi_{11}^T \mathcal{C}_{11}^*, \xi_{11}^T \mathcal{C}_{11}^* \right\rangle \\ &= (\xi_{11}^T \mathcal{C}_{11}^*)^T (\xi_{11}^T \mathcal{C}_{11}^*) \\ &= \mathcal{C}_{11}^{*T} (\xi_{11} \xi_{11}^T) \mathcal{C}_{11}^* \\ &= \begin{pmatrix} c_{111}^* & c_{112}^* & \dots & c_{11T}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{111} \\ \xi_{112} \\ \vdots \\ \xi_{11T} \end{pmatrix} (\xi_{111} \ \xi_{112} \ \dots \ \xi_{11T}) \begin{pmatrix} c_{111}^* \\ c_{112}^* \\ \vdots \\ c_{11T}^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$= \begin{pmatrix} c_{111}^* & c_{112}^* & \dots & c_{11T}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \xi_{111}, \xi_{111} \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle \xi_{112}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{112}, \xi_{112} \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{11T}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{11T}, \xi_{112} \rangle & \dots & \langle \xi_{11T}, \xi_{11T} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{111}^* \\ c_{112}^* \\ \vdots \\ c_{11T}^* \end{pmatrix}$$

$$= \xi_{11}^{*T} \mathbf{V}_{11}^* \xi_{11}^*.$$

Akibatnya :

$$\lambda_{11} \int_{a_{11}}^{b_{11}} \left[ \sum_{\ell=1}^p f_{11}^{(m)}(x_{\ell 11}) \right]^2 dx_{\ell 11} = \lambda_{11} \xi_{11}^{*T} \mathbf{V}_{11}^* \xi_{11}^* \quad (4.36)$$

Dengan cara yang serupa diperoleh :

$$\lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} \left[ \sum_{\ell=1}^p f_{ki}^{(m)}(x_{\ell ki}) \right]^2 dx_{\ell ki} = \lambda_{ki} \xi_{ki}^{*T} \mathbf{V}_{ki}^* \xi_{ki}^* \quad (4.37)$$

Berdasarkan Persamaan (4.37), diperoleh nilai *penalty* :

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} \left[ \sum_{\ell=1}^p f_{ki}^{(m)}(x_{\ell ki}) \right]^2 dx_{\ell ki} = \lambda_{11} \xi_{11}^{*T} \mathbf{V}_{11}^* \xi_{11}^* + \lambda_{12} \xi_{12}^{*T} \mathbf{V}_{12}^* \xi_{12}^* + \dots + \lambda_{1N} \xi_{1N}^{*T} \mathbf{V}_{1N}^* \xi_{1N}^* +$$

$$\lambda_{21} \xi_{21}^{*T} \mathbf{V}_{21}^* \xi_{21}^* + \lambda_{22} \xi_{22}^{*T} \mathbf{V}_{22}^* \xi_{22}^* + \dots + \lambda_{2N} \xi_{2N}^{*T} \mathbf{V}_{2N}^* \xi_{2N}^*$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_{11}^{*T} & \xi_{12}^{*T} & \dots & \xi_{1N}^{*T} & \xi_{21}^{*T} & \xi_{22}^{*T} & \dots & \xi_{2N}^{*T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \mathbf{V}_{11}^* & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{12} \mathbf{V}_{12}^* & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{1N} \mathbf{V}_{1N}^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{21} \mathbf{V}_{21}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_{22} \mathbf{V}_{22}^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{2N} \mathbf{V}_{2N}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{11}^* \\ \xi_{12}^* \\ \vdots \\ \xi_{1N}^* \\ \xi_{21}^* \\ \xi_{22}^* \\ \vdots \\ \xi_{2N}^* \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} \left[ f_{ki}^{(m)}(x_{it}) \right]^2 dx_{it} = \xi^{*T} \Lambda \mathbf{V}^* \xi^*, \quad (4.38)$$

Merujuk hasil persamaan (4.12), maka diperoleh *Goodness of fit* pada optimasi PWLS (4.35) dapat ditulis menjadi :

$$M^{-1}(\underline{y} - \underline{f})^T \Sigma^{-1}(\underline{y} - \underline{f}) = M^{-1}(\underline{y} - \mathbf{T}^* \underline{d}^* - \mathbf{V}^* \underline{c}^*)^T \Sigma^{-1}(\underline{y} - \mathbf{T}^* \underline{d}^* - \mathbf{V}^* \underline{c}^*). \quad (4.39)$$

Penyelesaian optimasi PWLS dengan mengkombinasikan *goodness of fit* (4.38) dan *penalty* (4.39), disajikan dalam bentuk :



$$\begin{aligned}
& \min_{f_{ki} \in W_2^m[a_i, b_i], k=1,2; i=1,2,\dots,N} \left\{ M^{-1}(y - \tilde{f})^T \Sigma^{-1}(y - \tilde{f}) + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} \left[ \sum_{l=1}^p f_{ki}^{(m)}(x_{lit}) \right]^2 dx_{lit} \right\} \\
&= \min_{\substack{\tilde{c} \in \mathbb{R}^{2NT} \\ \tilde{d} \in \mathbb{R}^{2Nm}}} \left\{ M^{-1}(\tilde{y} - \mathbf{T}^* \tilde{d}^* - \mathbf{V} \tilde{c}^*)^T \Sigma^{-1}(\tilde{y} - \mathbf{T}^* \tilde{d}^* - \mathbf{V} \tilde{c}^*) + \tilde{c}^{*T} \Lambda \mathbf{V}^* \tilde{c}^* \right\} \\
&= \min_{\substack{\tilde{c} \in \mathbb{R}^{2NT} \\ \tilde{d} \in \mathbb{R}^{2Nm}}} \left\{ ((\tilde{y} - \mathbf{T}^* \tilde{d}^* - \mathbf{V} \tilde{c}^*)^T \Sigma^{-1}(\tilde{y} - \mathbf{T}^* \tilde{d}^* - \mathbf{V} \tilde{c}^*) + \tilde{c}^{*T} \Lambda \mathbf{V}^* \tilde{c}^*) M^{-1} \right\} \\
&= \min_{\substack{\tilde{c} \in \mathbb{R}^{2NT} \\ \tilde{d} \in \mathbb{R}^{2Nm}}} \left\{ \left[ (\tilde{y}^T \Sigma^{-1} \tilde{y} - \tilde{y}^T \Sigma^{-1} \mathbf{T}^* \tilde{d}^* - \tilde{y}^T \Sigma^{-1} \mathbf{V} \tilde{c}^* - \tilde{d}^{*T} \mathbf{T}^{*T} \Sigma^{-1} \tilde{y} + \tilde{d}^{*T} \mathbf{T}^{*T} \Sigma^{-1} \mathbf{T}^* \tilde{d}^* + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \tilde{d}^{*T} \mathbf{T}^{*T} \Sigma^{-1} \mathbf{V} \tilde{c}^* - \tilde{c}^{*T} \mathbf{V}^* \Sigma^{-1} \tilde{y} + \tilde{c}^{*T} \mathbf{V}^* \Sigma^{-1} \mathbf{T}^* \tilde{d}^* + \tilde{c}^{*T} \mathbf{V}^* \Sigma^{-1} \mathbf{V} \tilde{c}^* + \tilde{c}^{*T} M \Lambda \mathbf{V}^* \tilde{c}^* \right] M^{-1} \right\} \\
&= \min_{\substack{\tilde{c} \in \mathbb{R}^{2NT} \\ \tilde{d} \in \mathbb{R}^{2Nm}}} \left\{ Q(\tilde{c}^*, \tilde{d}^*) \right\}. \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Penyelesaian optimasi (4.42), diperoleh dengan cara melakukan turunan parsial  $Q(\tilde{c}^*, \tilde{d}^*)$  berturut-turut terhadap  $\tilde{c}^*$  dan  $\tilde{d}^*$ , kemudian hasilnya disamakan dengan nol. Turunan parsial disajikan sebagai berikut :

$$\frac{\partial Q(\tilde{c}^*, \tilde{d}^*)}{\partial \tilde{c}^*} = 0,$$

memberikan hasil :

$$\begin{aligned}
& -2\mathbf{V}^{*T} \Sigma^{-1} \tilde{y} + 2\mathbf{V}^{*T} \Sigma^{-1} \mathbf{T}^* \tilde{d}^* + 2(\mathbf{V}^* \Sigma^{-1} \mathbf{V}^* + M \Lambda \mathbf{V}^*) \tilde{c}^* = 0. \\
& \mathbf{V}^{*T} \left\{ -\Sigma^{-1} \tilde{y} + \Sigma^{-1} \mathbf{T}^* \tilde{d}^* + [\Sigma^{-1} \mathbf{V}^* + M \Lambda \mathbf{I}] \tilde{c}^* \right\} = 0. \\
& -\Sigma^{-1} \tilde{y} + \Sigma^{-1} \mathbf{T}^* \tilde{d}^* + [\Sigma^{-1} \mathbf{V}^* + M \Lambda \mathbf{I}] \tilde{c}^* = 0. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Misalkan diberikan matriks :

$$\mathbf{U} = \Sigma^{-1} \mathbf{V}^* + M \Lambda.$$

maka Persamaan (4.27) dapat ditulis menjadi :

$$\begin{aligned}
& -\Sigma^{-1} \tilde{y} + \Sigma^{-1} \mathbf{T}^* \tilde{d}^* + \mathbf{U} \tilde{c}^* = 0. \\
& \mathbf{U} \tilde{c}^* = \Sigma^{-1}(\tilde{y} - \mathbf{T}^* \tilde{d}^*) \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.42) digandakan dari kiri dengan  $\mathbf{U}^{-1}$  diperoleh persamaan :

$$\tilde{c}^* = \mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1}(\tilde{y} - \mathbf{T}^* \tilde{d}^*) \tag{4.43}$$

Selanjutnya, turunan parsial :



$$\frac{\partial Q(\hat{\underline{z}}^*, \hat{\underline{d}}^*)}{\partial \hat{\underline{d}}^*} = 0,$$

memberikan hasil :

$$-\mathbf{T}^{*T} \Sigma^{-1} \underline{y} + \mathbf{T}^{*T} \Sigma^{-1} \mathbf{T}^* \hat{\underline{d}}^* + \mathbf{T}^{*T} \Sigma^{-1} \mathbf{V}^* \hat{\underline{z}}^* = 0$$

Penjabaran dari Persamaan (4.43), diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} -\mathbf{T}^{*T} \Sigma^{-1} \underline{y} + \mathbf{T}^{*T} \Sigma^{-1} \mathbf{T}^* \hat{\underline{d}}^* + \mathbf{T}^{*T} \Sigma^{-1} \mathbf{V}^* \{\mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1} (\underline{y} - \mathbf{T}^* \hat{\underline{d}}^*)\} &= 0 \\ -\mathbf{T}^{*T} \Sigma^{-1} \underline{y} + \mathbf{T}^{*T} \Sigma^{-1} \mathbf{T}^* \hat{\underline{d}}^* + \mathbf{T}^{*T} [\Sigma^{-1} \mathbf{V}^* \mathbf{U}^{-1}] \Sigma^{-1} (\underline{y} - \mathbf{T}^* \hat{\underline{d}}^*) &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Mengingat  $\mathbf{U} = \Sigma^{-1} \mathbf{V}^* + \mathbf{M} \Lambda \mathbf{I}$ , maka  $\mathbf{V}^* = \Sigma(\mathbf{U} - \mathbf{M} \Lambda \mathbf{I})$ , akibatnya diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\mathbf{V}^* \mathbf{U}^{-1} = \Sigma(\mathbf{U} - \mathbf{M} \Lambda \mathbf{I}) \mathbf{U}^{-1}.$$

$$\mathbf{V}^* \mathbf{U}^{-1} = \Sigma(\mathbf{I} - \mathbf{M} \Lambda \mathbf{U}^{-1}).$$

Dengan mengandakan persamaan di atas dengan  $\Sigma^{-1}$  didapat :

$$\Sigma^{-1} \mathbf{V}^* \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{M} \Lambda \mathbf{U}^{-1}.$$

Persamaan ini disubstitusikan dalam Persamaan (4.44) diperoleh persamaan :

$$-\mathbf{T}^{*T} \Sigma^{-1} \underline{y} + \mathbf{T}^{*T} \Sigma^{-1} \mathbf{T}^* \hat{\underline{d}}^* + \mathbf{T}^{*T} [\mathbf{I} - \mathbf{M} \Lambda \mathbf{U}^{-1}] \Sigma^{-1} (\underline{y} - \mathbf{T}^* \hat{\underline{d}}^*) = 0$$

Apabila persamaan di atas dijabarkan, diperoleh persamaan :

$$-\mathbf{M} \Lambda \mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1} \underline{y} + \mathbf{M} \Lambda \mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1} \mathbf{T}^* \hat{\underline{d}}^* = 0.$$

$$\mathbf{M} \Lambda \mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1} \mathbf{T}^* \hat{\underline{d}}^* = \mathbf{M} \Lambda \mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1} \underline{y}.$$

Kedua ruas persamaan ini digandakan dengan  $(\mathbf{M} \Lambda)^{-1}$  kemudian disederhanakan, diperoleh :

$$\hat{\underline{d}}^* = (\mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1} \mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1} \underline{y}. \quad (4.45)$$

Persamaan (4.43) disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.45) diperoleh :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{z}}^* &= \mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1} (\underline{y} - \mathbf{T}^* [(\mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1} \mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1} \underline{y}]) \\ &= \mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^* (\mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1} \mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \Sigma^{-1}] \underline{y}. \end{aligned} \quad (4.46)$$



Berdasarkan Persamaan (4.45) dan Persamaan (4.46), diperoleh estimator untuk kurva regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal yang melibatkan  $p$  prediktor sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{\lambda} &= \mathbf{T}^* \hat{d}^* + \mathbf{V}^* \hat{c}^* \\ &= \mathbf{A}_{\lambda}^* y, \end{aligned} \quad (4.47)$$

dengan :

$$\mathbf{A}_{\lambda}^* = \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} + \mathbf{V}^* \mathbf{U}^{-1} \hat{\Sigma} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \hat{\Sigma} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \mathbf{U}^{-1} \hat{\Sigma}]$$

Matriks varians kovarians *error*  $\hat{\Sigma}$  akan disajikan pada bagian berikutnya (subbab 4.2), sehingga pada Teorema 4.2 berikut, menggunakan  $\hat{\Sigma}$  dan  $\hat{\mathbf{U}} = \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{V} + \mathbf{M} \Lambda$ , sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\hat{d}^* &= \left( \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} y, \\ \hat{c}^* &= \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1}] y, \\ \hat{f}_{\lambda} &= \mathbf{A}_{\lambda}^* y, \end{aligned}$$

Dengan

$$\mathbf{A}_{\lambda}^* = \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} + \mathbf{V}^* \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}] . \blacksquare$$

Setelah mendapatkan estimator kurva regresi, pada bagian berikut akan dijelaskan beberapa sifat linier dan bias dari estimator kurva regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal  $\hat{f}_{\lambda}$ .

- Estimator kurva regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal  $\hat{f}_{\lambda}$  adalah linier. Terlihat dari Persamaan (4.34) dan Persamaan (4.37) bahwa estimator kurva regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal  $\hat{f}_{\lambda}$ , merupakan estimator linier dalam pengamatan.
- Estimator kurva regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal  $\hat{f}_{\lambda}$  adalah bias. Walaupun estimator kurva regresi nonparametrik birespon untuk



data longitudinal  $\hat{f}_{\lambda}$ , merupakan estimator linier dalam pengamatan, tetapi estimator ini adalah bias untuk kurva regresi  $f$ . Pernyataan ini dapat dibuktikan sebagai berikut :

Persamaan (4.47) memberikan :

$$\hat{f}_{\lambda} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{11,\lambda_{11}}(x_1) \\ \hat{f}_{12,\lambda_{12}}(x_2) \\ \vdots \\ \hat{f}_{1N,\lambda_{1N}}(x_N) \\ \hat{f}_{21,\lambda_{21}}(x_1) \\ \hat{f}_{22,\lambda_{22}}(x_2) \\ \vdots \\ \hat{f}_{2N,\lambda_{2N}}(x_N) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\lambda} \mathbf{y}_{\lambda}$$

Persamaan di atas diambil ekspektasinya, diperoleh persamaan :

$$E[\hat{f}_{\lambda}] = E \begin{bmatrix} \hat{f}_{11,\lambda_{11}}(x_1) \\ \hat{f}_{12,\lambda_{12}}(x_2) \\ \vdots \\ \hat{f}_{2N,\lambda_{2N}}(x_N) \\ \hat{f}_{21,\lambda_{21}}(x_1) \\ \hat{f}_{22,\lambda_{22}}(x_2) \\ \vdots \\ \hat{f}_{2N,\lambda_{2N}}(x_N) \end{bmatrix}$$



$$E[\hat{f}_{\tilde{z}}] = E[\mathbf{A}_{\tilde{z}} \tilde{y}] = E[\mathbf{A}_{\tilde{z}} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1N} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2N} \end{pmatrix}]$$

$$E[\hat{f}_{\tilde{z}}] = \mathbf{A}_{\tilde{z}} \begin{pmatrix} E(y_{11}) \\ E(y_{12}) \\ \vdots \\ E(y_{1N}) \\ E(y_{21}) \\ E(y_{22}) \\ \vdots \\ E(y_{2N}) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\tilde{z}} \begin{pmatrix} f_{11}(x_1) \\ f_{12}(x_2) \\ \vdots \\ f_{1N}(x_N) \\ f_{21}(x_1) \\ f_{22}(x_2) \\ \vdots \\ f_{2N}(x_N) \end{pmatrix}$$

Mengingat  $\mathbf{A}_{\tilde{z}} \neq \mathbf{I}$ , maka

$$E[\hat{f}_{\tilde{z}}] \neq \begin{pmatrix} f_{11}(x_1) \\ f_{12}(x_2) \\ \vdots \\ f_{1N}(x_N) \\ f_{21}(x_1) \\ f_{22}(x_2) \\ \vdots \\ f_{2N}(x_N) \end{pmatrix}$$

$$E[\hat{f}_{\tilde{z}}] \neq f.$$

## 4.2 Estimasi Matriks Varians-Kovarians *Error*

Penelitian yang menyangkut model regresi nonparametrik untuk data longitudinal, telah banyak dikembangkan oleh para peneliti. Umumnya para peneliti tersebut mengasumsikan matriks varians-kovarians dari *error random*-nya



diketahui, kenyataannya varians dan kovarians tidak diketahui. Akibatnya perlu dilakukan estimasi untuk matriks varians-kovarians dari *error random* dalam model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal. Untuk tujuan ini, akan digunakan metode *Maximum Likelihood Estimator* (MLE).  $\varepsilon_{kit}$  adalah *random error* dari hasil pendugaan respon ke- $k$  pada subyek ke- $i$ , pengamatan ke- $t$  diasumsikan berdistribusi normal  $2NT$ -variat, dengan *mean*  $E(\varepsilon)=0$  (vektor berukuran  $2NT$ ) dan matriks varians-kovarians  $\text{Var}(\varepsilon)=\Sigma$  (matriks berukuran  $2NT \times 2NT$ ) sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{11.1} & 0 & \dots & 0 & \hat{\Sigma}_{12.1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma}_{11.2} & \dots & 0 & 0 & \hat{\Sigma}_{12.2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\Sigma}_{11.N} & 0 & 0 & \dots & \hat{\Sigma}_{12.N} \\ \hat{\Sigma}_{12.1} & 0 & \dots & 0 & \hat{\Sigma}_{22.1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma}_{12.2} & \dots & 0 & 0 & \hat{\Sigma}_{22.2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\Sigma}_{12.N} & 0 & 0 & \dots & \hat{\Sigma}_{22.N} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Untuk mendapatkan estimasi  $\hat{\Sigma}_{kk'.i}$ ;  $k=1,2$ ;  $k'=1,2$ ;  $i=1,2,\dots,N$ , diperoleh dari partisi Teorema Estimasi Matriks Varians Kovarians *Error Random* (Lampiran 1) untuk model regresi linier sederhana pada data *cross-section* oleh Johnson & Wichern (1982) seperti disajikan pada Lampiran 4, dengan memecah  $y$  menjadi  $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1N}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2N}$ , dengan fungsi *likelihood* setiap  $y_{ki}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} L(f_{ki}, \Sigma_{kk'.i} | y_{ki}) &= \prod_{t=1}^T \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{T/2} |\Sigma_{kk'.i}|^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (y_{kit} - f_{kit})^T \Sigma_{kk'.i}^{-1} (y_{kit} - f_{kit}) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{TT/2} |\Sigma_{kk'.i}|^{T/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (y_{kit} - f_{kit})^T \Sigma_{kk'.i}^{-1} (y_{kit} - f_{kit}) \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{TT/2} |\Sigma_{kk'.i}|^{T/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Sigma_{kk'.i}^{-1} \sum_{t=1}^T (y_{kit} - f_{kit})(y_{kit} - f_{kit})^T \right] \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Dalam bentuk logaritma natural menjadi:



$$L(f_{ki}, \Sigma_{kk'.i} | y_{ki}) = -\frac{TT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Sigma_{kk'.i}^{-1} \sum_{t=1}^T (y_{kit} - f_{kit})(y_{k'it} - f_{k'it})^T \right] \quad (4.50)$$

Misalkan  $\mathbf{W}_{kk'.i} = \frac{\sum_{t=1}^T (y_{kit} - f_{kit})(y_{k'it} - f_{k'it})^T}{T}$ , sehingga diperoleh:

$$\ln [L(f_{ki}, \Sigma_{kk'.i} | y_{ki})] = -\frac{TT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln |\Sigma_{kk'.i}| - \frac{T}{2} \text{tr} [\Sigma_{kk'.i}^{-1} \mathbf{W}_{kk'.i}] \quad (4.51)$$

Estimator untuk matriks varians-kovarians  $\hat{\Sigma}_{kk'.i}$  didapatkan dengan memaksimumkan fungsi  $\ln [L(f_{ki}, \Sigma_{kk'.i} | y_{ki})]$  pada persamaan (4.51), dengan cara

$$\frac{\partial \ln [L(f_{ki}, \Sigma_{kk'.i} | y_{ki})]}{\partial \Sigma_{kk'.i}} = \mathbf{0}.$$

$$\frac{\partial \ln [L(f_{ki}, \Sigma_{kk'.i} | y_{ki})]}{\partial \Sigma_{kk'.i}} = \frac{\partial \left[ -\frac{TT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln |\Sigma_{kk'.i}| - \frac{T}{2} \text{tr} [\Sigma_{kk'.i}^{-1} \mathbf{W}_{kk'.i}] \right]}{\partial \Sigma_{kk'.i}}$$

$$= -\frac{T}{2} \Sigma_{kk'.i}^{-1} \Sigma_{kk'.i} \Sigma_{kk'.i}^{-1} + \frac{T}{2} \Sigma_{kk'.i}^{-1} \mathbf{W}_{kk'.i} \Sigma_{kk'.i}^{-1}$$

$$= -\frac{T}{2} \Sigma_{kk'.i}^{-1} (\Sigma_{kk'.i} - \mathbf{W}_{kk'.i}) \Sigma_{kk'.i}^{-1}$$

$$\frac{\partial \ln [L(f_{kit}, \hat{\Sigma}_{kk'.i} | y_{kit})]}{\partial \hat{\Sigma}_{kk'.i}} = \mathbf{0}$$

$$-\frac{T}{2} \hat{\Sigma}_{kk'.i}^{-1} (\hat{\Sigma}_{kk'.i} - \mathbf{W}_{kk'.i}) \hat{\Sigma}_{kk'.i}^{-1} = \mathbf{0}$$

$$\hat{\Sigma}_{kk'.i} = \mathbf{W}_{kk'.i}$$

Dengan demikian, estimator matriks varians-kovarians *error*  $\hat{\Sigma}_{kk'.i}$  untuk model regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal disajikan sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma}_{kk'.i} = \mathbf{W}_{kk'.i} = \frac{(y_{ki} - \hat{f}_{ki})(y_{k'i} - \hat{f}_{k'i})^T}{T} \quad (4.52)$$

Penjabaran setiap submatriks  $\hat{\Sigma}_{kk'.i}$  untuk  $k=1,2; k'=1,2; i=1,2,...,N$  sebagai berikut:



$$\hat{\Sigma}_{11,1} = \frac{(y_{11} - \hat{f}_{11})(y_{11} - \hat{f}_{11})^T}{T},$$

$$\hat{\Sigma}_{11,2} = \frac{(y_{12} - \hat{f}_{12})(y_{12} - \hat{f}_{12})^T}{T},$$

⋮

$$\hat{\Sigma}_{11,N} = \frac{(y_{1N} - \hat{f}_{1N})(y_{1N} - \hat{f}_{1N})^T}{T},$$

$$\hat{\Sigma}_{22,1} = \frac{(y_{21} - \hat{f}_{21})(y_{21} - \hat{f}_{21})^T}{T},$$

$$\hat{\Sigma}_{22,2} = \frac{(y_{22} - \hat{f}_{22})(y_{22} - \hat{f}_{22})^T}{T},$$

⋮

$$\hat{\Sigma}_{22,N} = \frac{(y_{2N} - \hat{f}_{2N})(y_{2N} - \hat{f}_{2N})^T}{T},$$

$$\hat{\Sigma}_{12,1} = \frac{(y_{11} - \hat{f}_{11})(y_{21} - \hat{f}_{21})^T}{T},$$

$$\hat{\Sigma}_{12,2} = \frac{(y_{12} - \hat{f}_{12})(y_{22} - \hat{f}_{22})^T}{T},$$

⋮

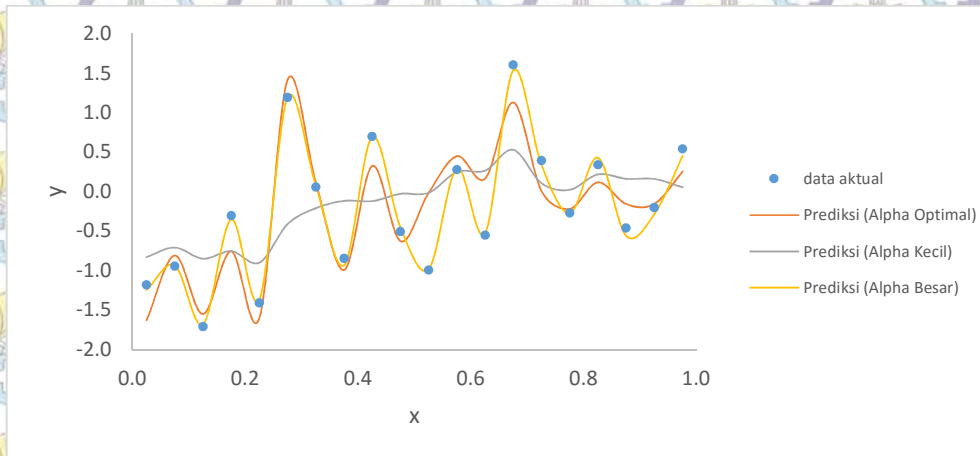
$$\hat{\Sigma}_{12,N} = \frac{(y_{1N} - \hat{f}_{1N})(y_{2N} - \hat{f}_{2N})^T}{T}.$$

### 4.3 Metode Memilih Parameter Penghalus Optimal

Wahba (1990) memperlihatkan dalam regresi nonparametrik *spline*, jika nilai parameter penghalus  $\lambda$  sangat kecil ( $\lambda \rightarrow 0$ ) maka akan memberikan estimator kurva regresi yang sangat kasar. Sebaliknya, jika nilai parameter penghalus  $\lambda$  sangat besar ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) maka akan menghasilkan estimator kurva regresi nonparametrik yang sangat mulus. Gambar 4.1 memperlihatkan perbandingan hasil estimasi fungsi regresi nonparametrik birespon *spline* untuk data longitudinal antara penggunaan  $\lambda$  optimal dan tidak optimal. Jika menggunakan  $\lambda$  yang terlalu besar,



maka estimasi fungsi yang diperoleh cukup jauh dari data aktual. Hal sebaliknya jika menggunakan  $\lambda$  yang terlalu kecil, maka estimasi fungsi yang diperoleh sangat mendekati dari data aktual. Dengan kata lain, diperlukan pendugaan parameter penghalus  $\lambda$  optimal untuk mendapatkan estimasi fungsi regresi nonparametrik birespon *spline* untuk data longitudinal yang terbaik. Akibatnya dalam estimator *spline* untuk data *cross section* perlu dipilih parameter penghalus  $\lambda$  yang optimal agar diperoleh estimator yang paling sesuai untuk data.



**Gambar 4.1:** Penggunaan Parameter Penghalus Optimal & Tidak Optimal

Pada pemilihan parameter penghalus optimal telah dikembangkan beberapa metode dalam regresi nonparametrik untuk data *cross section*, seperti Wahba (1990) memberikan suatu metode *Generalized Cross Validation (GCV)*. Berikut ini diberikan suatu metode untuk memilih parameter penghalus optimal dalam estimator *spline* terbobot dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal. Estimator *spline* terbobot dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal:

$$\hat{f}_{\lambda}(x) = \mathbf{A}_{\lambda} \tilde{y}.$$

*Goodness of fit* atau  $R(f)$  seperti yang disajikan pada persamaan (2.18) dari estimator *spline* ini diberikan oleh :

$$\begin{aligned} R(f) &= \mathbf{M}^{-1}(\tilde{y} - \hat{f}_{\lambda}(x))^{\top} \hat{\Sigma}^{-1} (\tilde{y} - \hat{f}_{\lambda}(x)) \\ &= \mathbf{M}^{-1}[\tilde{y} - \mathbf{A}_{\lambda} \tilde{y}]^{\top} \hat{\Sigma}^{-1} [\tilde{y} - \mathbf{A}_{\lambda} \tilde{y}] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= M^{-1}[(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\hat{\lambda}})y]^T \hat{\Sigma}^{-1}[(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\hat{\lambda}})y] \\
&= M^{-1} \left( [(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\hat{\lambda}})y]^T [\hat{\Sigma}^{-1}]^{\frac{1}{2}T} \right) \left( [\hat{\Sigma}^{-1}]^{\frac{1}{2}} [(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\hat{\lambda}})y] \right) \\
&= M^{-1} \left( [\hat{\Sigma}^{-1}]^{\frac{1}{2}} [(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\hat{\lambda}})y] \right)^T \left( [\hat{\Sigma}^{-1}]^{\frac{1}{2}} [(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\hat{\lambda}})y] \right) \\
&= M^{-1} \left\| [\hat{\Sigma}^{-1}]^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\hat{\lambda}})y \right\|^2. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Matriks  $[\hat{\Sigma}^{-1}]^{\frac{1}{2}}$  merupakan suatu matriks dengan sifat :

$$[\hat{\Sigma}^{-1}]^{\frac{1}{2}T} [\hat{\Sigma}^{-1}]^{\frac{1}{2}} = \hat{\Sigma}^{-1}. \tag{4.54}$$

Selanjutnya didefinisikan kuantitas :

$$G(\hat{\lambda}; \hat{\Sigma}) = \frac{M^{-1} \left\| [\hat{\Sigma}^{-1}]^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_M - \mathbf{A}_{\hat{\lambda}})y \right\|^2}{\left[ M^{-1} \text{tr}(\mathbf{I}_M - \mathbf{A}_{\hat{\lambda}}) \right]^2}. \tag{4.55}$$

Parameter penghalus  $\hat{\lambda}_{opt}$  yang optimal diperoleh dari menyelesaikan optimasi minimum dari fungsi  $G(\hat{\lambda}; \hat{\Sigma})$  seperti yang disajikan pada persamaan (4.55). Penyelesaian optimasi dengan meminimalkan fungsi GCV pada persamaan (4.55) menggunakan prosedur `nmlinb` pada program R. Prosedur ini meminimumkan satu tujuan (*single objective*) yaitu Minimum GCV, sehingga diperoleh nilai duga  $2N$  parameter penghalus. Penjelasan lengkap mengenai prosedur ini disajikan pada Lampiran 9.



## BAB 5

### HASIL KAJIAN TERAPAN

#### 5.1. Aplikasi Estimator *Spline* Pada Data Simulasi

Pada bagian berikut disajikan penerapan estimator *spline* pada data simulasi untuk menjawab Tujuan 2 penelitian ini yaitu mengaplikasikan model regresi nonparametrik birespon *spline* pada data simulasi. Simulasi digunakan untuk (1) Mendapatkan gambaran tentang kemampuan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal pada berbagai tingkat orde polinomial *spline* ( $m$ ), dan (2) Membandingkan kemampuan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal pada matriks varians-kovarians yang mempertimbangkan korelasi antar respon dengan matriks varians-kovarians pada berbagai tingkat korelasi ( $|\rho| = 0,1$  hingga  $0,9$ ). Hasil simulasi secara lengkap disajikan Lampiran 8 dan visualisasi sebagian hasil simulasi disajikan pada subbab 5.1.1 dan 5.1.2.

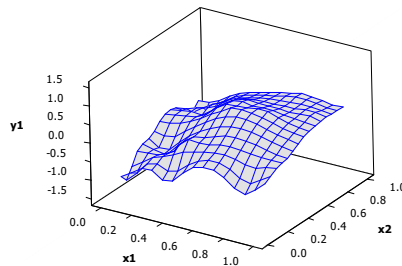
##### 5.1.1. Simulasi Pada Berbagai Tingkat Orde Polinomial *Spline* ( $m$ )

Pada bagian pertama simulasi, ditampilkan gambaran tentang kemampuan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal pada berbagai tingkat orde polinomial *spline* ( $m$ ). Ada dua kondisi yang digunakan yaitu (1) variasi ukuran pengamatan  $T=10, 20, 50$ , dan  $100$ , dan (2) variasi fungsi percobaan (eksponensial, trigonometri, dan polinomial), disajikan pada subbab 5.1.1.1 hingga 5.1.1.6. Untuk memudahkan implementasi simulasi, pada bagian berikut hanya menyajikan ukuran sampel  $T=20$  pada setiap variasi fungsi percobaan (EE, TT, PP, ET, EP, TP), dan selanjutnya pada setiap ukuran pengamatan  $T$ , orde polinomial *spline*  $m$ , dan variasi fungsi percobaan terangkum pada Tabel 5.13 dan 5.14.

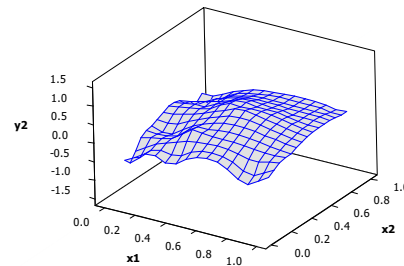


#### 5.1.1.1. Fungsi Percobaan Eksponensial-Eksponensial (EE)

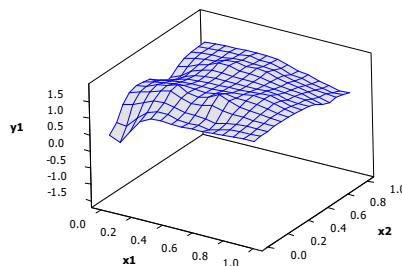
Simulasi berikut berasal dari kelompok fungsi percobaan EE, yaitu kurva regresi dibangun dari fungsi Eksponensial untuk  $f_{k1}$  dan Eksponensial untuk  $f_{k2}$ . Pada subbab selanjutnya disajikan data bangkitan pada ukuran sampel ( $T$ ) sebesar 20. Data bangkitan untuk simulasi menetapkan korelasi antar *error*  $\rho = 0,5$ . Plot antara prediktor dengan respon untuk simulasi fungsi percobaan EE disajikan pada Gambar 5.1.



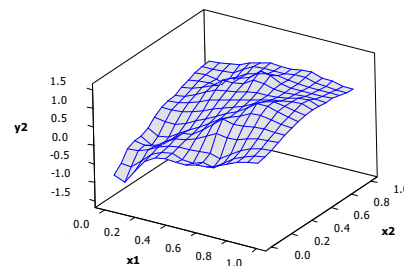
(a) Subyek ke-1 respon  $y_1$



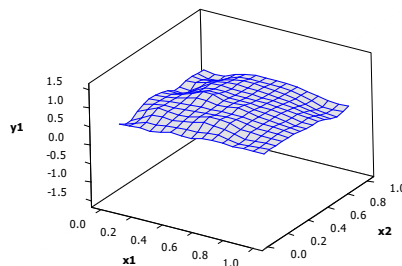
(b) Subyek ke-1 respon  $y_2$



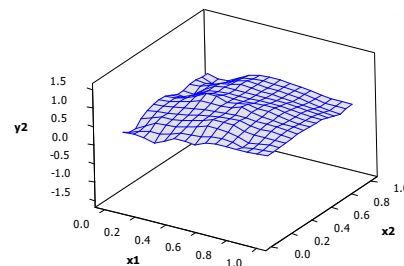
(c) Subyek ke-2 respon  $y_1$



(d) Subyek ke-2 respon  $y_2$



(e) Subyek ke-3 respon  $y_1$



(f) Subyek ke-3 respon  $y_2$

**Gambar 5.1:** Plot Data Hasil Simulasi Fungsi Percobaan EE



Gambar 5.1 merupakan visualisasi plot antara prediktor  $x_1$  pada sumbu-x dan prediktor  $x_2$  sumbu-y, terhadap respon  $y_1$  pada sumbu-z (gambar bagian kiri), dan respon  $y_2$  pada sumbu-z (gambar bagian kanan). Estimator *spline* untuk data hasil simulasi fungsi percobaan EE disajikan secara lengkap pada Lampiran 8.2. Tabel 5.1 menyajikan pemilihan parameter penghalus ( $\lambda_{ki}$ ) optimal berdasarkan nilai minimum *GCV*, dengan orde polinomial  $m=2$ .

**Tabel 5.1:** Parameter Penghalus Pada Simulasi Fungsi Percobaan EE

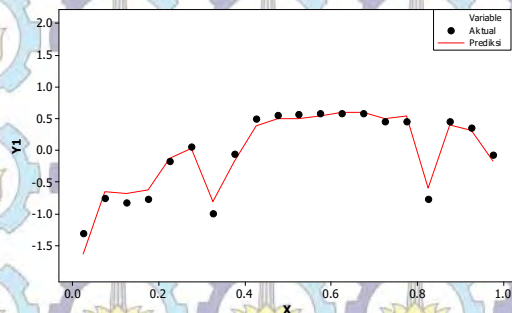
No	<i>GCV</i>	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{23}$
0	632004,5	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
1	0,0132879	0,0255146	0,0255164	0,0255162	0,0255147	0,0255151	0,0255161
2	0,0131977	0,0212685	0,0313580	0,0257549	0,0226571	0,0262867	0,0257675
...	...	...	...	...	...	...	...
23	<b>0,0128381</b>	0,0034982	0,0555746	0,0276612	0,0110781	0,0292427	0,0260361
$R^2 = 0,9770$ $RMSE = 0,089$							

Berdasarkan minimum *GCV* yaitu 0,0128381 diperoleh masing-masing nilai parameter penghalus berkisar pada nilai 0,0034982 hingga 0,0292427. Nilai  $R^2$  diperoleh sebesar 0,9770 atau 97,70% model yang diperoleh dapat menggambarkan hubungan antara  $(x_{1i}, x_{2i})$  dengan  $(y_{1i}, y_{2i})$ . Tabel 5.1 menyajikan hasil estimasi parameter  $\hat{q}$  dan  $\hat{c}$ .

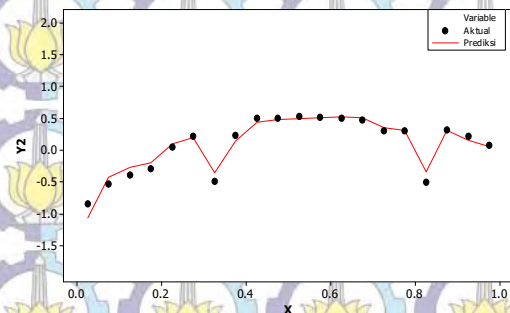
**Tabel 5.2:** Estimasi Parameter Model Pada Simulasi Fungsi Percobaan EE

Parameter Model	Respon 1			Respon 2		
	Subyek 1	Subyek 2	Subyek 3	Subyek 1	Subyek 2	Subyek 3
$d_{ki1}$	-1,2046	-6,7762	1,1949	6,2698	26,1061	-0,2357
$d_{ki2}$	4,5029	0,3977	-0,0996	-21,3468	14,2898	3,8285
$d_{ki3}$	-6,7762	1,1949	6,2698	26,1061	-0,2357	-13,1777
$d_{ki4}$	0,3977	-0,0996	-21,3468	14,2898	3,8285	16,3138
$d_{ki5}$	1,1949	6,2698	26,1061	-0,2357	-13,1777	9,6714
$c_{ki1}$	0,9257	-0,4439	-0,1106	-0,5180	0,3088	0,1700
$c_{ki2}$	-0,2829	-0,2780	0,1494	0,4589	0,1403	0,0630
...	...	...	...	...	...	...
$c_{ki20}$	0,0875	0,0485	-0,0316	0,0438	0,0416	-0,0299

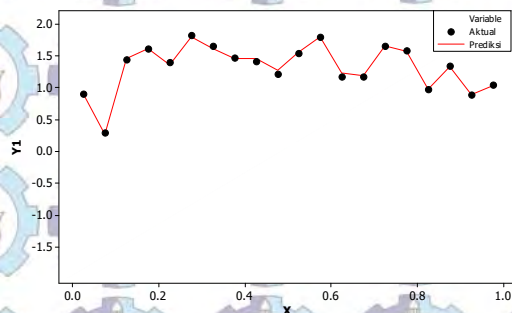




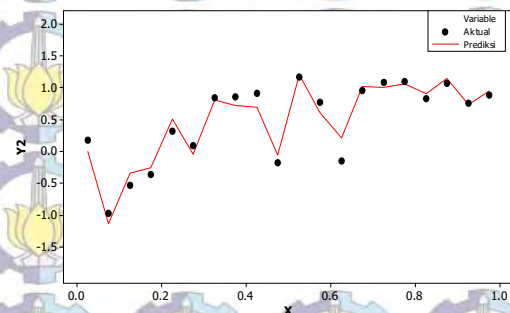
(a) Subyek ke-1 respon  $y_1$



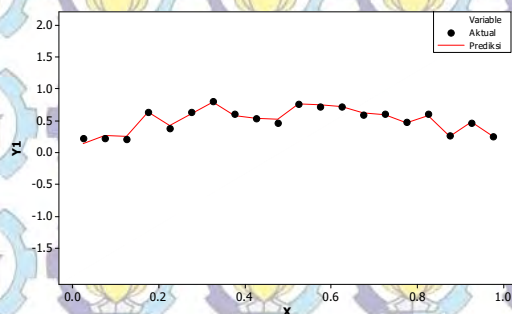
(b) Subyek ke-1 respon  $y_2$



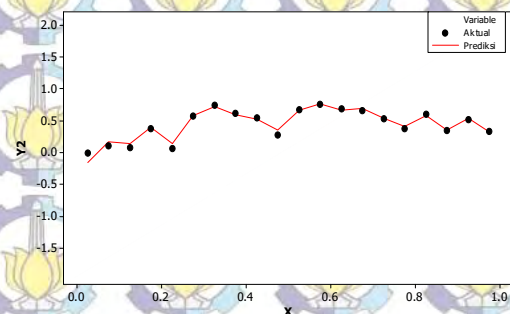
(c) Subyek ke-2 respon  $y_1$



(d) Subyek ke-2 respon  $y_2$



(e) Subyek ke-3 respon  $y_1$



(f) Subyek ke-3 respon  $y_2$

**Gambar 5.2:** Plot Data Aktual & Prediksi Hasil Simulasi Fungsi Percobaan EE

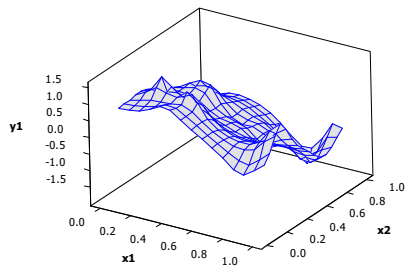
Plot hasil estimator *spline* birespon untuk data longitudinal diberikan pada Gambar 5.2. Dari grafik tersebut memperlihatkan bahwa kemampuan prediksi yang baik mampu dihasilkan oleh estimator *spline* dimana hampir semua titik mampu didekati oleh kurva prediksi.



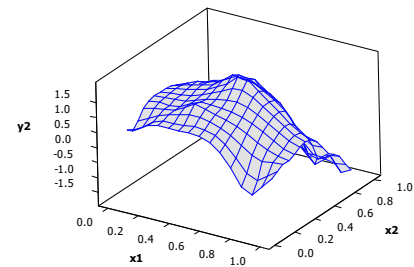
### 5.1.1.2. Fungsi Percobaan Trigonometri-Trigonometri (TT)

Simulasi berasal dari kelompok fungsi percobaan TT, yaitu kurva regresi dibangkitkan dari fungsi Trigonometri untuk  $f_{k1}$  dan Trigonometri untuk  $f_{k2}$ .

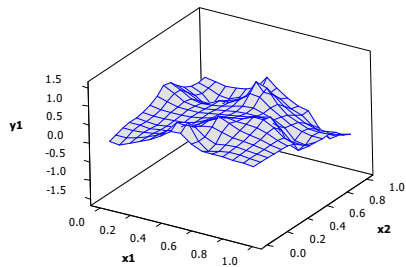
Pada subbab selanjutnya disajikan data bangkitan pada ukuran sampel ( $T$ ) sebesar 20. Data bangkitan untuk simulasi menetapkan korelasi antar *error*  $\rho = 0,5$ . Plot antara prediktor dengan respon untuk simulasi fungsi percobaan TT disajikan pada Gambar 5.3.



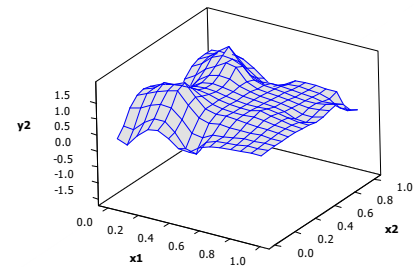
(a) Subyek ke-1 respon  $y_1$



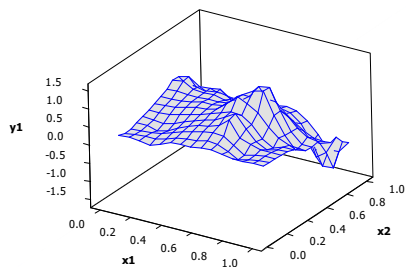
(b) Subyek ke-1 respon  $y_2$



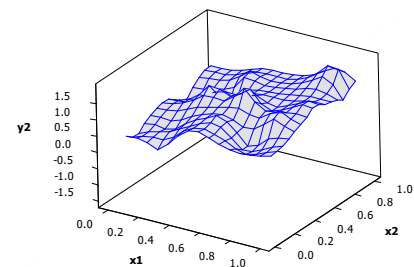
(c) Subyek ke-2 respon  $y_1$



(d) Subyek ke-2 respon  $y_2$



(e) Subyek ke-3 respon  $y_1$



(f) Subyek ke-3 respon  $y_2$

**Gambar 5.3:** Plot Data Hasil Simulasi Fungsi Percobaan TT



**Tabel 5.3:** Parameter Penghalus Pada Simulasi Fungsi Percobaan TT

No	GCV	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{23}$
0	28740,1	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
1	0,2787380	0,4076170	0,4084770	0,4085610	0,4080660	0,4082650	0,4085040
2	0,2387602	0,0492033	0,0555294	0,0516850	0,0382447	0,0528209	0,0586567
...	...	...	...	...	...	...	...
12	<b>0,1987361</b>	0,4071780	0,4090410	0,4084630	0,4074530	0,4079470	0,4094060

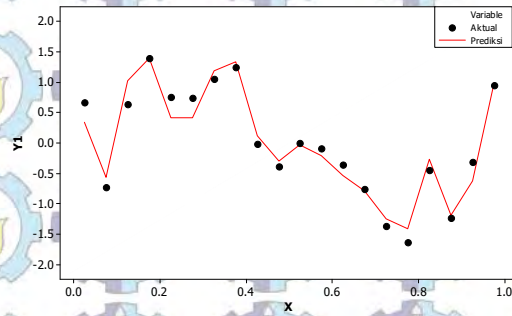
$R^2 = 0,8240$   
 $MSE = 0,357$

Berdasarkan minimum *GCV* yaitu 0,1987361 diperoleh masing-masing nilai parameter penghalus berkisar pada nilai 0,4071780 hingga 0,4094060. Nilai  $R^2$  diperoleh sebesar 0,8240 atau 82,40% model yang diperoleh dapat menggambarkan hubungan antara  $(x_{1i}, x_{2i})$  dengan  $(y_{1i}, y_{2i})$ . Tabel 5.4 menyajikan hasil estimasi parameter  $\hat{d}$  dan  $\hat{c}$ . Plot hasil estimator *spline* birespon untuk data longitudinal diberikan pada Gambar 5.4. Dari grafik tersebut memperlihatkan bahwa kemampuan prediksi yang baik mampu dihasilkan oleh estimator *spline* dimana hampir semua titik mampu didekati oleh kurva prediksi.

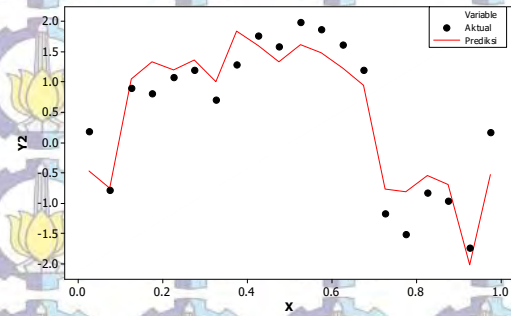
**Tabel 5.4:** Estimasi Parameter Model Pada Simulasi Fungsi Percobaan TT

Parameter Model	Respon 1			Respon 2		
	Subyek 1	Subyek 2	Subyek 3	Subyek 1	Subyek 2	Subyek 3
$d_{ki1}$	-0,6321	-67,9323	0,0417	9,3272	-0,0063	21,5206
$d_{ki2}$	12,8231	133,5387	-0,4925	-29,4793	-1,8476	-61,6987
$d_{ki3}$	-67,9323	0,0417	9,3272	-0,0063	21,5206	-1,1062
$d_{ki4}$	133,5387	-0,4925	-29,4793	-1,8476	-61,6987	11,7765
$c_{ki1}$	0,0252	-0,0043	-0,0069	-0,0115	0,0082	0,0156
$c_{ki2}$	-0,0001	-0,0218	-0,0083	-0,0228	0,0113	0,0160
...	...	...	...	...	...	...
$c_{ki20}$	0,0298	0,0076	0,0116	0,0129	-0,0100	-0,0379

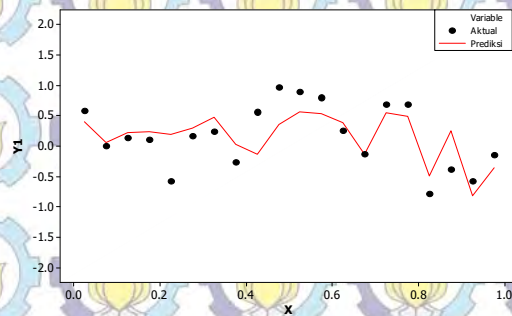




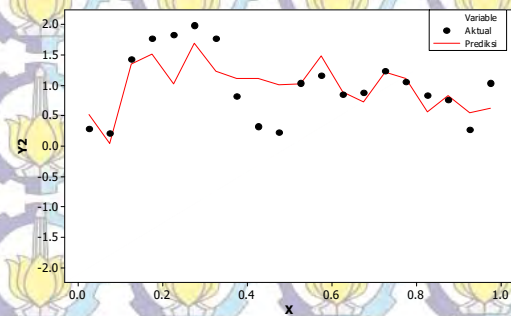
(a) Subyek ke-1 respon  $y_1$



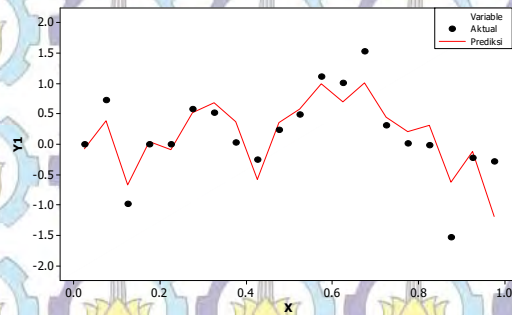
(b) Subyek ke-1 respon  $y_2$



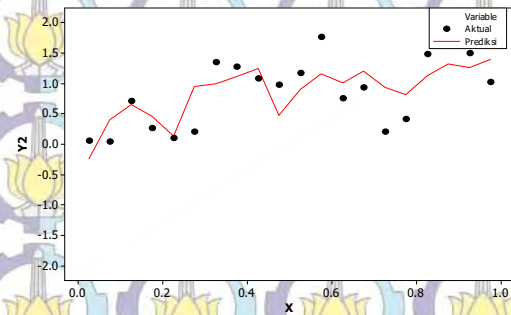
(c) Subyek ke-2 respon  $y_1$



(d) Subyek ke-2 respon  $y_2$



(e) Subyek ke-3 respon  $y_1$



(f) Subyek ke-3 respon  $y_2$

**Gambar 5.4:** Plot Data Aktual & Prediksi Hasil Simulasi Fungsi Percobaan TT

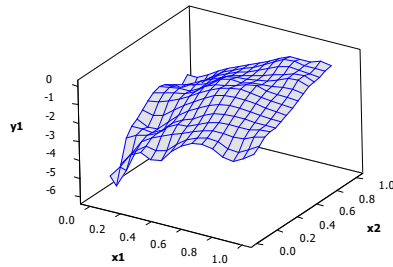
### 5.1.1.3. Fungsi Percobaan Polinomial-Polinomial (PP)

Simulasi berasal dari kelompok fungsi percobaan PP, yaitu kurva regresi dibangkitkan dari fungsi Polinomial untuk  $f_{k1}$  dan Polinomial untuk  $f_{k2}$ . Pada subbab selanjutnya disajikan data bangkitan pada ukuran sampel ( $T$ ) sebesar 20.

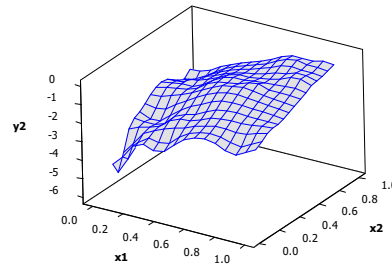
Data bangkitan untuk simulasi menetapkan korelasi antar error



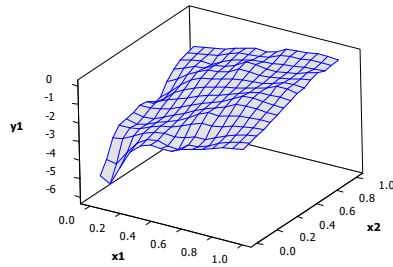
$\rho = 0,5$ . Plot antara prediktor dengan respon untuk simulasi fungsi percobaan PP disajikan pada Gambar 5.5.



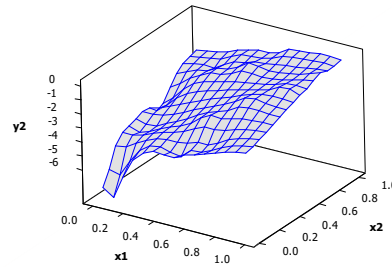
(a) Subyek ke-1 respon  $y_1$



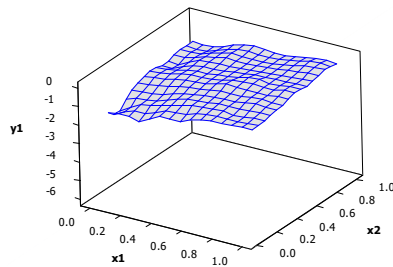
(b) Subyek ke-1 respon  $y_2$



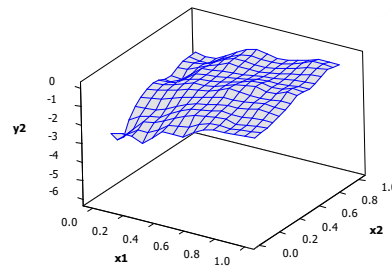
(c) Subyek ke-2 respon  $y_1$



(d) Subyek ke-2 respon  $y_2$



(e) Subyek ke-3 respon  $y_1$



(f) Subyek ke-3 respon  $y_2$

**Gambar 5.5:** Plot Data Hasil Simulasi Fungsi Percobaan PP



Gambar 5.5 merupakan visualisasi plot antara prediktor  $x_1$  pada sumbu-x dan prediktor  $x_2$  sumbu-y, terhadap respon  $y_1$  pada sumbu-z (gambar bagian kiri), dan respon  $y_2$  pada sumbu-z (gambar bagian kanan). Tabel 5.5 menyajikan pemilihan parameter penghalus ( $\lambda_{ki}$ ) optimal berdasarkan nilai minimum  $GCV$ .

**Tabel 5.5:** Parameter Penghalus Pada Simulasi Fungsi Percobaan PP

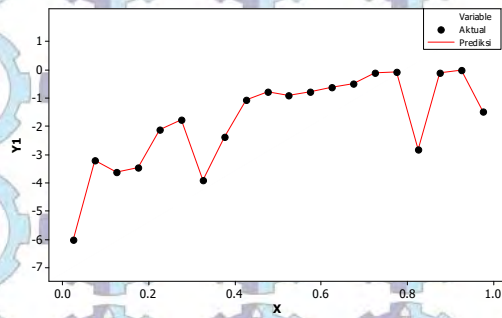
No	$GCV$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{23}$
0	6393310,3	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
1	0,0000163	0,2041240	0,2041240	0,2041240	0,2041240	0,2041240	0,2041240
2	0,0000022	0,2041240	0,2041240	0,2041240	0,2041240	0,2041240	0,2041240
...	...	...	...	...	...	...	...
7	<b>1,594E-25</b>	0,2041240	0,2041240	0,2041240	0,2041240	0,2041240	0,2041240
$R^2 = 0,9887$ $RMSE = 0,0031$							

Berdasarkan minimum  $GCV$  yaitu 1,594E-25, diperoleh masing-masing nilai parameter penghalus berkisar pada nilai 0,204124 hingga 0,204124. Nilai  $R^2$  diperoleh sebesar 0,9887 atau 98,87% model yang diperoleh dapat menggambarkan hubungan antara  $(x_{1i}, x_{2i})$  dengan  $(y_{1i}, y_{2i})$ . Tabel 5.6 menyajikan hasil estimasi parameter  $\hat{d}$  dan  $\hat{c}$ . Plot hasil estimator *spline* birespon untuk data longitudinal diberikan pada Gambar 5.6. Dari grafik tersebut memperlihatkan bahwa kemampuan prediksi yang baik mampu dihasilkan oleh estimator *spline* dimana hampir semua titik mampu didekati oleh kurva prediksi.

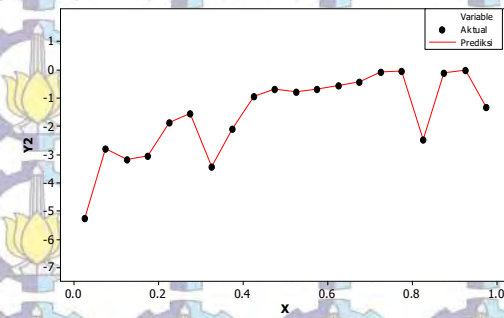
**Tabel 5.6:** Estimasi Parameter Model Pada Simulasi Fungsi Percobaan PP

Parameter Model	Respon 1			Respon 2		
	Subyek 1	Subyek 2	Subyek 3	Subyek 1	Subyek 2	Subyek 3
$d_{ki1}$	-3,7528	-11,6722	7,3416	-1,4139	-4,3726	8,2342
$d_{ki2}$	9,4245	-2,8890	-9,1495	3,5446	-3,2835	-10,1599
$d_{ki3}$	-11,6722	7,3416	-1,4139	-4,3726	8,2342	-4,3303
$c_{ki1}$	-0,2391	0,0918	0,0351	0,0965	-0,0134	-0,0309
$c_{ki2}$	-0,2033	0,1873	0,0455	0,2124	-0,0816	-0,0608
...	...	...	...	...	...	...
$c_{ki20}$	0,2002	-0,1680	0,2018	0,2229	0,0534	-0,0198

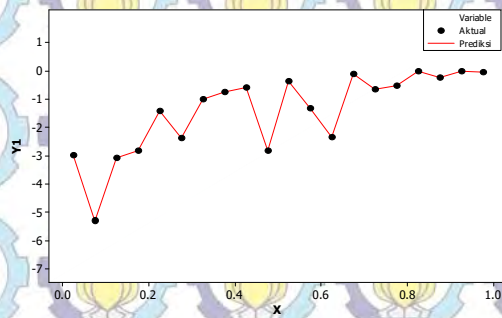




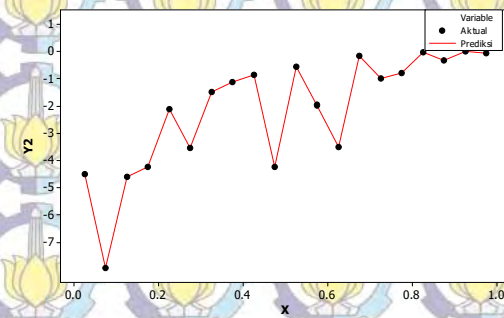
(a) Subyek ke-1 respon  $y_1$



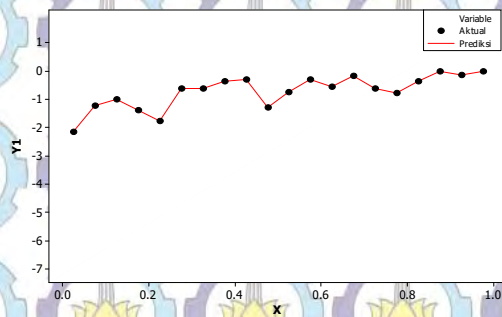
(b) Subyek ke-1 respon  $y_2$



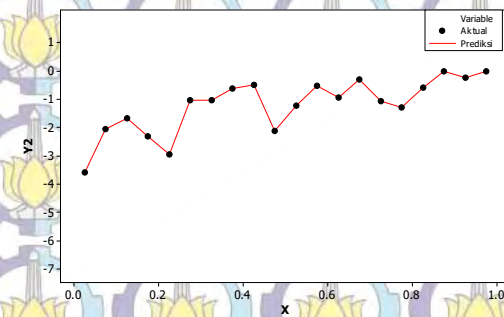
(c) Subyek ke-2 respon  $y_1$



(d) Subyek ke-2 respon  $y_2$



(e) Subyek ke-3 respon  $y_1$



(f) Subyek ke-3 respon  $y_2$

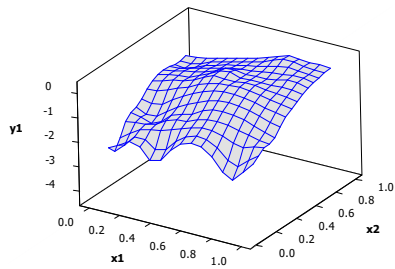
**Gambar 5.6:** Plot Data Aktual & Prediksi Hasil Simulasi Fungsi Percobaan PP



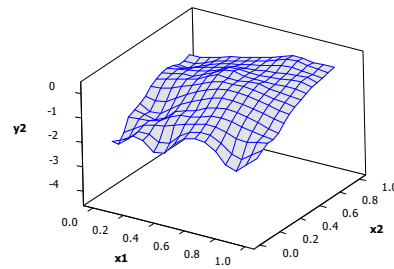
#### 5.1.1.4. Fungsi Percobaan Eksponensial-Trigonometri (ET)

Simulasi berasal dari kelompok fungsi percobaan ET, yaitu kurva regresi dibangkitkan dari fungsi Eksponensial untuk  $f_{k1}$  dan Trigonometri untuk  $f_{k2}$ .

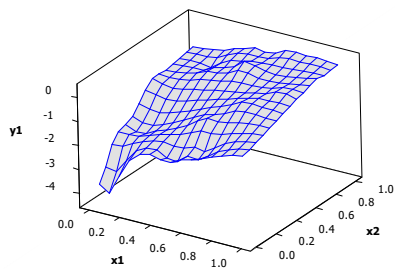
Pada subbab selanjutnya disajikan data bangkitan pada ukuran sampel ( $T$ ) sebesar 20. Data bangkitan untuk simulasi menetapkan korelasi antar *error*  $\rho = 0,5$ . Plot antara prediktor dengan respon untuk simulasi fungsi percobaan ET disajikan pada Gambar 5.7.



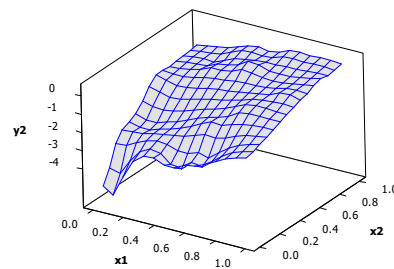
(a) Subyek ke-1 respon  $y_1$



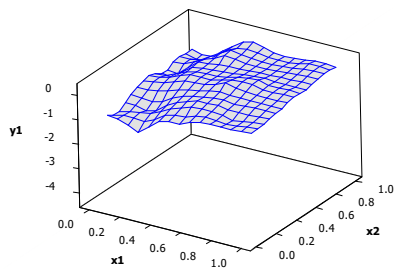
(b) Subyek ke-1 respon  $y_2$



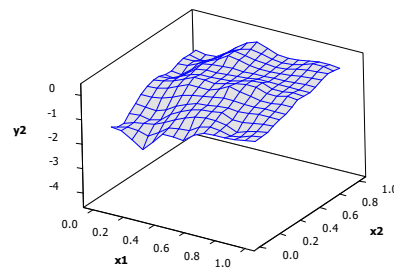
(c) Subyek ke-2 respon  $y_1$



(d) Subyek ke-2 respon  $y_2$



(e) Subyek ke-3 respon  $y_1$



(f) Subyek ke-3 respon  $y_2$

**Gambar 5.7:** Plot Data Hasil Simulasi Fungsi Percobaan ET



Gambar 5.7 merupakan visualisasi plot antara prediktor  $x_1$  pada sumbu-x dan prediktor  $x_2$  sumbu-y, terhadap respon  $y_1$  pada sumbu-z (gambar bagian kiri), dan respon  $y_2$  pada sumbu-z (gambar bagian kanan). Tabel 5.7 menyajikan pemilihan parameter penghalus ( $\lambda_{ki}$ ) optimal berdasarkan nilai minimum  $GCV$ .

**Tabel 5.7:** Parameter Penghalus Pada Simulasi Fungsi Percobaan ET

No	$GCV$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{23}$
0	583458,2	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
1	0,1909697	0,0127551	0,0127587	0,0127577	0,0127582	0,0127582	0,0127587
2	0,1853158	0,0098476	0,0139201	0,0137085	0,0115133	0,0130987	0,0144576
...	...	...	...	...	...	...	...
9	<b>0,1759273</b>	0,0047545	0,0156066	0,0163029	0,0081798	0,0140192	0,0176815

$R^2 = 0,6819$   
 $RMSE = 0,346$

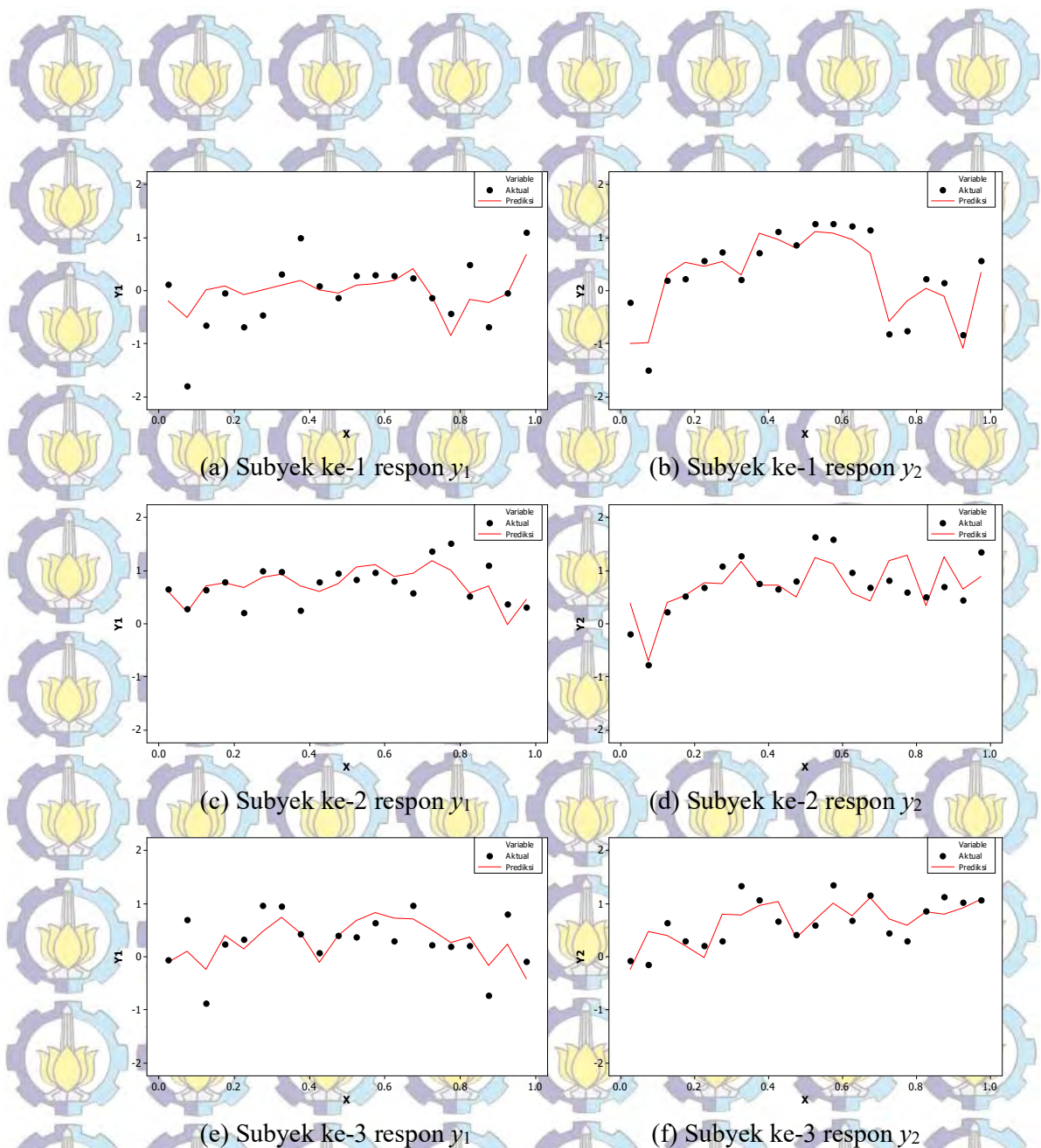
Berdasarkan minimum  $GCV$  yaitu 0,1759273, diperoleh masing-masing nilai parameter penghalus berkisar pada nilai 0,0047545 hingga 0,0176815. Nilai  $R^2$  diperoleh sebesar 0,6819 atau 68,19% model yang diperoleh dapat menggambarkan hubungan antara  $(x_{1i}, x_{2i})$  dengan  $(y_{1i}, y_{2i})$ . Tabel 5.8

menyajikan hasil estimasi parameter  $\hat{d}$  dan  $\hat{c}$ . Plot hasil estimator *spline* birespon untuk data longitudinal diberikan pada Gambar 5.8. Dari grafik tersebut memperlihatkan bahwa kemampuan prediksi yang baik mampu dihasilkan oleh estimator *spline* dimana hampir semua titik mampu didekati oleh kurva prediksi.

**Tabel 5.8:** Estimasi Parameter Model Pada Simulasi Fungsi Percobaan ET

Parameter Model	Respon 1			Respon 2		
	Subyek 1	Subyek 2	Subyek 3	Subyek 1	Subyek 2	Subyek 3
$d_{ki1}$	-0,2862	-8,0770	6,4776	2,0096	-1,8765	-0,3308
$d_{ki2}$	2,5116	9,6338	0,0353	-3,4100	-0,5588	2,9857
$d_{ki3}$	-8,0770	6,4776	2,0096	-1,8765	-0,3308	-5,2570
$d_{ki4}$	9,6338	0,0353	-3,4100	-0,5588	2,9857	-3,0007
$d_{ki5}$	6,4776	2,0096	-1,8765	-0,3308	-5,2570	-0,8898
$c_{ki1}$	2,5366	-0,2861	0,2549	-0,4749	0,2067	0,3561
$c_{ki2}$	-2,7428	-1,2583	0,5252	-1,8308	0,0590	0,4299
...	...	...	...	...	...	...
$c_{ki20}$	0,6001	-0,0931	-0,0168	0,3402	0,1233	0,2908





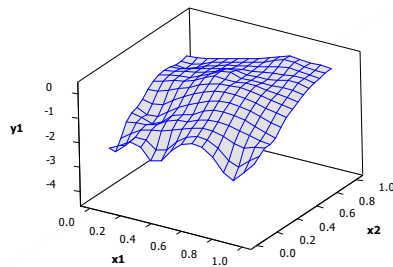
**Gambar 5.8:** Plot Data Aktual & Prediksi Hasil Simulasi Fungsi Percobaan ET

#### 5.1.1.5. Fungsi Percobaan Eksponensial-Polinomial (EP)

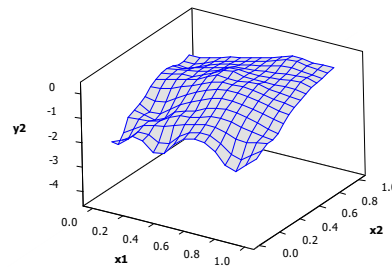
Simulasi berasal dari kelompok fungsi percobaan EP, yaitu kurva regresi dibangun dari fungsi Eksponensial untuk  $f_{k1}$  dan Polinomial untuk  $f_{k2}$ . Pada subbab selanjutnya disajikan data bangkitan pada ukuran sampel ( $T$ ) sebesar 20. Data bangkitan untuk simulasi menetapkan korelasi antar *error*



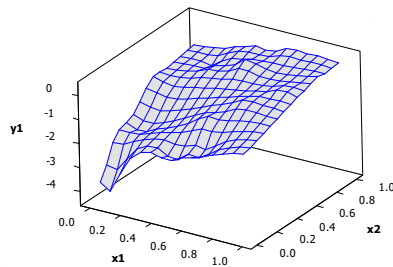
$\rho = 0.5$ . Plot antara prediktor dengan respon untuk simulasi fungsi percobaan EP disajikan pada Gambar 5.9.



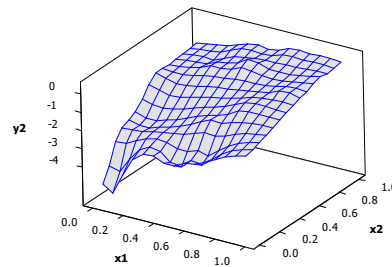
(a) Subyek ke-1 respon  $y_1$



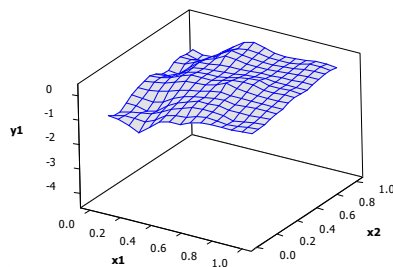
(b) Subyek ke-1 respon  $y_2$



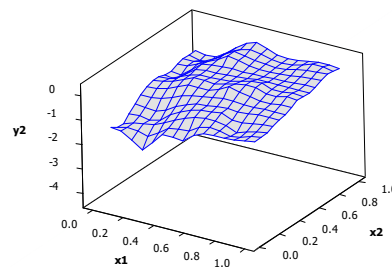
(c) Subyek ke-2 respon  $y_1$



(d) Subyek ke-2 respon  $y_2$



(e) Subyek ke-3 respon  $y_1$



(f) Subyek ke-3 respon  $y_2$

**Gambar 5.9:** Plot Data Hasil Simulasi Fungsi Percobaan EP

Gambar 5.9 merupakan visualisasi plot antara prediktor  $x_1$  pada sumbu-x dan prediktor  $x_2$  sumbu-y, terhadap respon  $y_1$  pada sumbu-z (gambar bagian kiri), dan respon  $y_2$  pada sumbu-z (gambar bagian kanan). Tabel 5.9 menyajikan pemilihan parameter penghalus ( $\lambda_{ki}$ ) optimal berdasarkan nilai minimum  $GCV$ .



**Tabel 5.9:** Parameter Penghalus Pada Simulasi Fungsi Percobaan EP

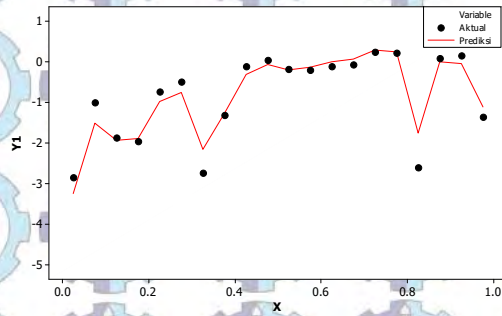
No	GCV	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{23}$
0	20912496,0	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
1	0,1376721	0,0127577	0,0127578	0,0127578	0,0127577	0,0127578	0,0127578
2	0,1328129	0,0107539	0,0150661	0,0139153	0,0114778	0,0114583	0,0138752
...	...	...	...	...	...	...	...
11	<b>0,1252936</b>	0,0072363	0,0191184	0,0159463	0,0092337	0,0091793	0,0158356
$R^2 = 0,9077$ $RMSE = 0,302$							

Berdasarkan minimum  $GCV$  yaitu 0,1252936, diperoleh masing-masing nilai parameter penghalus berkisar pada nilai 0,0072363 hingga 0,0191184. Nilai  $R^2$  diperoleh sebesar 0,9077 atau 90,77% model yang diperoleh dapat menggambarkan hubungan antara  $(x_{1i}, x_{2i})$  dengan  $(y_{1i}, y_{2i})$ . Tabel 5.10 menyajikan hasil estimasi parameter  $\hat{d}$  dan  $\hat{c}$ .

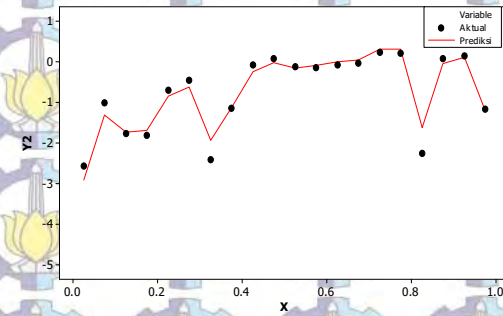
**Tabel 5.10:** Estimasi Parameter Model Pada Simulasi Fungsi Percobaan EP

Parameter Model	Respon 1			Respon 2		
	Subyek 1	Subyek 2	Subyek 3	Subyek 1	Subyek 2	Subyek 3
$d_{ki1}$	-2,0971	-5,5205	-1,0412	5,1910	-3,0910	-1,1332
$d_{ki2}$	5,3370	-3,4380	-2,0541	-5,2453	-0,9387	3,1258
$d_{ki3}$	-5,5205	-1,0412	5,1910	-3,0910	-1,1332	-3,4053
$d_{ki4}$	-3,4380	-2,0541	-5,2453	-0,9387	3,1258	-2,0932
$d_{ki5}$	-1,0412	5,1910	-3,0910	-1,1332	-3,4053	-0,6365
$c_{ki1}$	0,7111	-0,1047	0,2672	-0,8979	0,3452	0,0623
$c_{ki2}$	0,5879	-0,2152	0,3342	0,0399	0,1904	-0,0519
...	...	...	...	...	...	...
$c_{ki20}$	0,1802	-0,3451	0,1222	0,0364	0,2046	-0,6581

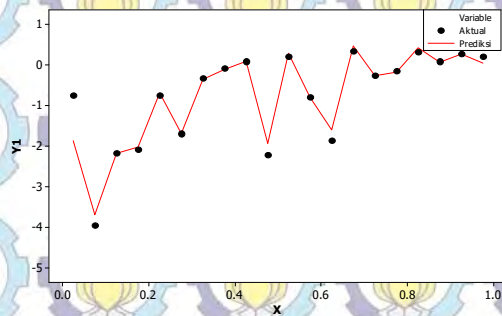




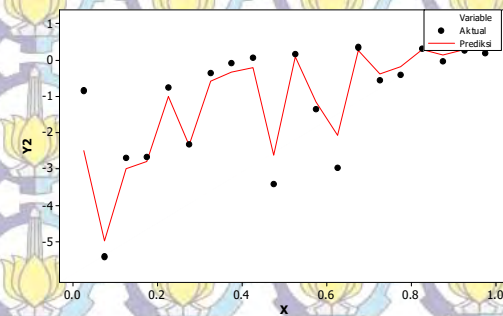
(a) Subyek ke-1 respon  $y_1$



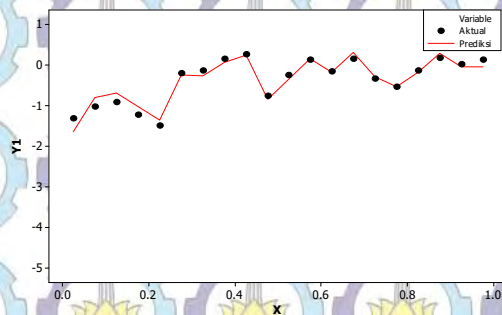
(b) Subyek ke-1 respon  $y_2$



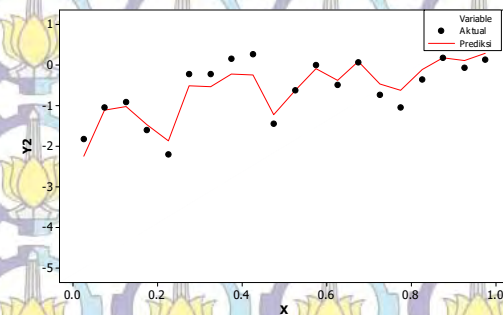
(c) Subyek ke-2 respon  $y_1$



(d) Subyek ke-2 respon  $y_2$



(e) Subyek ke-3 respon  $y_1$



(f) Subyek ke-3 respon  $y_2$

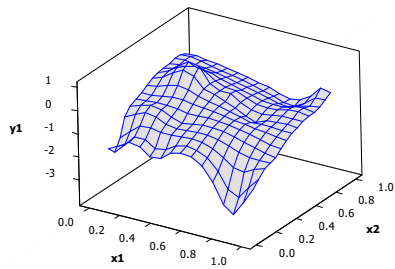
**Gambar 5.10:** Plot Data Aktual & Prediksi Hasil Simulasi Fungsi Percobaan EP

Plot hasil estimator *spline* birespon untuk data longitudinal diberikan pada Gambar 5.10. Dari grafik tersebut memperlihatkan bahwa kemampuan prediksi yang baik mampu dihasilkan oleh estimator *spline* dimana hampir semua titik mampu didekati oleh kurva prediksi.

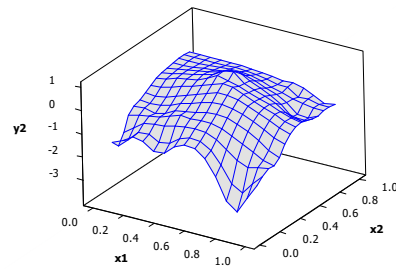


#### 5.1.1.6. Fungsi Percobaan Trigonometri-Polinomial (TP)

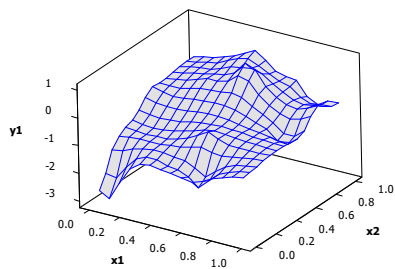
Simulasi berasal dari kelompok fungsi percobaan TP, yaitu kurva regresi dibangkitkan dari fungsi Trigonometri untuk  $f_{k1}$  dan Polinomial untuk  $f_{k2}$ . Pada subbab selanjutnya disajikan data bangkitan pada ukuran sampel ( $T$ ) sebesar 20. Data bangkitan untuk simulasi menetapkan korelasi antar error  $\rho = 0,5$ . Plot antara prediktor dengan respon untuk simulasi fungsi percobaan TP disajikan pada Gambar 5.11.



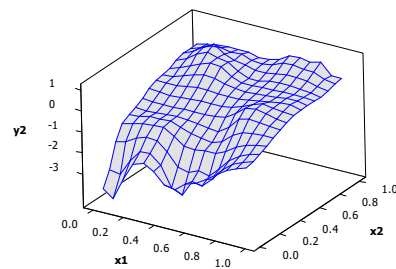
(a) Subyek ke-1 respon  $y_1$



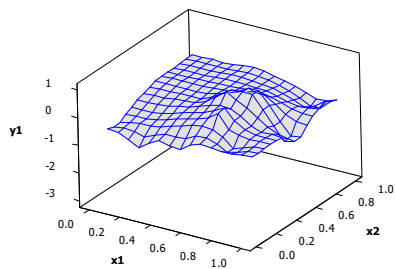
(b) Subyek ke-1 respon  $y_2$



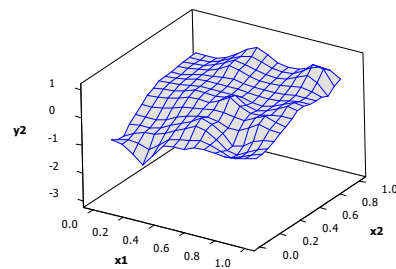
(c) Subyek ke-2 respon  $y_1$



(d) Subyek ke-2 respon  $y_2$



(e) Subyek ke-3 respon  $y_1$



(f) Subyek ke-3 respon  $y_2$

**Gambar 5.11:** Plot Data Hasil Simulasi Fungsi Percobaan TP



Gambar 5.11 merupakan visualisasi plot antara prediktor  $x_1$  pada sumbu-x dan prediktor  $x_2$  sumbu-y, terhadap respon  $y_1$  pada sumbu-z (gambar bagian kiri), dan respon  $y_2$  pada sumbu-z (gambar bagian kanan). Tabel 5.11 menyajikan pemilihan parameter penghalus ( $\lambda_{ki}$ ) optimal berdasarkan nilai minimum  $GCV$ .

**Tabel 5.11:** Parameter Penghalus Pada Simulasi Fungsi Percobaan TP

No	$GCV$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{23}$
0	1672065,3	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
1	0,4826164	0,0127576	0,0127584	0,0127578	0,0127574	0,0127578	0,0127576
2	0,4718323	0,0118215	0,0138378	0,0140884	0,0095979	0,0134524	0,0137484
...	...	...	...	...	...	...	...
11	<b>0,4708710</b>	0,0117561	0,0138948	0,0144173	0,0091123	0,0135306	0,0138238

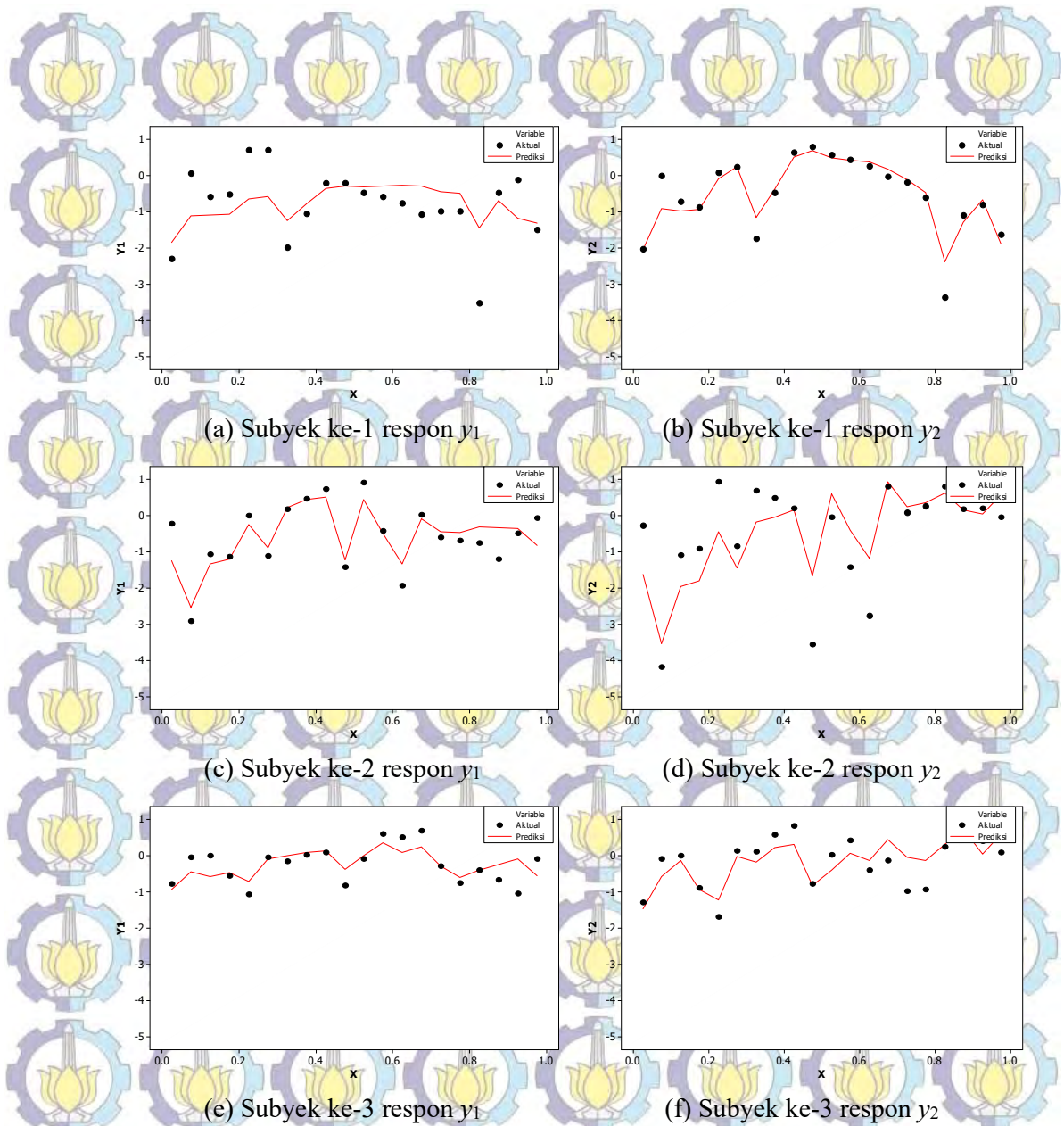
$R^2 = 0,6100$   
 $RMSE = 0,585$

Berdasarkan minimum  $GCV$  yaitu 0,4708710, diperoleh masing-masing nilai parameter penghalus berkisar pada nilai 0,0091123 hingga 0,0144173. Nilai  $R^2$  diperoleh sebesar 0,6100 atau 61,00% model yang diperoleh dapat menggambarkan hubungan antara  $(x_{1i}, x_{2i})$  dengan  $(y_{1i}, y_{2i})$ . Tabel 5.12 menyajikan hasil estimasi parameter  $\hat{d}$  dan  $\hat{c}$ . Plot hasil estimator *spline* birespon untuk data longitudinal diberikan pada Gambar 5.12. Dari grafik tersebut memperlihatkan bahwa kemampuan prediksi yang baik mampu dihasilkan oleh estimator *spline* dimana hampir semua titik mampu didekati oleh kurva prediksi.

**Tabel 5.12:** Estimasi Parameter Model Pada Simulasi Fungsi Percobaan TP

Parameter Model	Respon 1			Respon 2		
	Subyek 1	Subyek 2	Subyek 3	Subyek 1	Subyek 2	Subyek 3
$d_{ki1}$	-1,2054	-4,6241	-1,4473	-5,9262	-0,7003	-3,6469
$d_{ki2}$	3,2542	-2,7988	4,3897	-3,3601	2,4700	-2,1317
$d_{ki3}$	-4,6241	-1,4473	-5,9262	-0,7003	-3,6469	-1,4052
$d_{ki4}$	-2,7988	4,3897	-3,3601	2,4700	-2,1317	4,4258
$c_{ki1}$	0,1419	0,2816	0,0004	-0,7137	0,1523	0,1776
$c_{ki2}$	1,1040	-0,0191	-0,2669	-0,0546	0,1561	0,0800
...	...	...	...	...	...	...
$c_{ki20}$	0,4539	-0,7004	1,0749	0,8032	0,6652	-2,2864





**Gambar 5.12:** Plot Data Aktual & Prediksi Hasil Simulasi Fungsi Percobaan TP

Hasil simulasi pada berbagai tingkat orde polinomial *spline* ( $m$ ). Ada dua kondisi yang digunakan yaitu (1) variasi ukuran pengamatan  $T=10, 20, 50$ , dan  $100$ , dan (2) variasi fungsi percobaan (EE, TT, PP, ET, EP, dan TP).



**Tabel 5.13:** Nilai  $R^2$  Berbagai Variasi Ukuran Pengamatan & Fungsi Percobaan

$T$	$m$	Fungsi Percobaan					
		EE	TT	PP	ET	EP	TP
10	2	0,7742	0,6653	0,8892	0,3895	0,7769	0,6565
	3	0,9199	0,9063*	0,9150	0,6828	0,9274	0,7283
	4	0,9351*	0,8379	0,9327*	0,8010*	0,9280*	0,7747
	5	0,9276	0,8373	0,9112	0,7157	0,9247	0,7045
20	2	0,7810	0,5470	0,8909	0,4244	0,8067	0,5190
	3	0,9108	0,7548	0,9294	0,6488	0,9075	0,5993
	4	0,9384	0,8241*	0,9119	0,6457	0,9077*	0,6100
	5	0,9395*	0,8240	0,9394*	0,6819*	0,9075	0,6136*
50	2	0,8298	0,3483	0,9383	0,5433	0,9399*	0,9217*
	3	0,9143	0,6156	0,9211	0,5163	0,9282	0,6952
	4	0,9214*	0,6998*	0,9313	0,5401	0,9161	0,8307
	5	0,9202	0,6988	0,9340*	0,5685*	0,9390	0,7850
100	2	0,8811	0,6544	0,9248	0,4870	0,8422	0,9223*
	3	0,9273	0,7545*	0,9353*	0,6716	0,9321	0,8570
	4	0,9195	0,7489	0,9280	0,6902	0,9214	0,8693
	5	0,9315*	0,7503	0,9291	0,7625*	0,9365*	0,8619

Keterangan: \* menyatakan nilai  $R^2$  tertinggi tiap variasi  $T$  dan Fungsi Percobaan

**Tabel 5.14:** Nilai  $RMSE$  Berbagai Variasi Ukuran Pengamatan & Fungsi Percobaan

$T$	$m$	Fungsi Percobaan					
		EE	TT	PP	ET	EP	TP
10	2	0,2946	0,5163	0,4814	0,4991	0,5110	0,7594
	3	0,1140	0,4763	0,2480	0,3720*	0,2905*	0,6117*
	4	0,0648	0,2956*	0,0100*	0,4385	0,2992	0,6988
	5	0,0632*	0,2963	0,0101	0,4452	0,3048	0,6333
20	2	0,2693	0,5876	0,4506	0,5035	0,4199	0,6761
	3	0,1200	0,4245	0,0735	0,3699	0,3142	0,5877
	4	0,0927	0,3575	0,0100*	0,3685	0,3059	0,5852*
	5	0,0894*	0,3569*	0,0101	0,3463*	0,3018*	0,5858
50	2	0,2429	0,6000	1,1825	0,4851	1,0957	1,1824
	3	0,1625	0,4610	0,1811	0,4408	0,2629	2,1493
	4	0,1411	0,4083*	0,0105	0,4238	0,2623*	0,3720*
	5	0,1091*	0,4085	0,0100*	0,4174*	0,3226	0,5151
100	2	0,2007	0,4945	0,4927	0,4758	0,3369	0,9585
	3	0,1470	0,4122	0,0510	0,4088	0,2666*	0,3400
	4	0,1285	0,3914	0,0100*	0,3895	0,2722	0,3308*
	5	0,0964*	0,3903*	0,0110	0,3353*	0,2636	0,3487

Keterangan: \* menyatakan nilai  $RMSE$  tiap variasi  $T$  dan Fungsi Percobaan



Tabel 5.13 dan Tabel 5.14 memperlihatkan bahwa variasi nilai  $R^2$  dan  $RMSE$  pada berbagai fungsi, dan ukuran pengamatan (sampel) pada berbagai tingkat orde polinomial *spline* ( $m$ ). Hasil simulasi memperlihatkan bahwa orde polinomial *spline*  $m=4$  dan  $m=5$  yang paling sering terpilih berdasarkan nilai  $R^2$  tertinggi dan  $RMSE$  terendah. Karakteristik fungsi percobaan polinomial memberikan hasil simulasi lebih baik dibandingkan fungsi percobaan eksponensial dan trigonometri. Karakteristik ukuran sampel  $T=50$  dan  $T=100$  (sampel besar) memberikan hasil simulasi lebih baik dibandingkan ukuran sampel  $T=10$  dan  $T=20$  (sampel kecil).

### 5.1.2. Simulasi Pada Berbagai Tingkat Korelasi dan Matriks Varians-Kovarians

Pada bagian kedua simulasi, ditampilkan perbandingan kemampuan estimator *spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal pada dua jenis matriks varians-kovarians yang digunakan yaitu  $\Sigma_{MK}$  yang mempertimbangkan dan korelasi antar respon, serta  $\Sigma_{TMK}$  yang tidak mempertimbangkan korelasi antar respon seperti yang disajikan pada Langkah 2c pada subbab 3.2.3, dan tingkat korelasi  $|\rho|$  antara 0,1 hingga 0,9. Tabel 5.15 menyajikan perbandingan nilai  $R^2$  dan  $RMSE$ .

**Tabel 5.15:** Nilai  $R^2$  &  $RMSE$  Berbagai Tingkat Korelasi & Matriks-Varians

Fungsi Percobaan	$ \rho $	$R^2$		$RMSE$	
		$\Sigma_{MK}$	$\Sigma_{TMK}$	$\Sigma_{MK}$	$\Sigma_{TMK}$
EE	0,1	0,6795	0,6425	0,5150	0,5554
	0,2	0,3104	0,2779	0,5530	0,4957
	0,3	0,5523	0,5952	0,5256	0,5489
	0,4	0,8934	0,5797	0,0894	0,4431
	0,5	0,9234	0,4622	0,0922	0,4883
	0,6	0,9213	0,5799	0,0922	0,5387
	0,7	0,9410	0,4728	0,0900	0,4779
	0,8	0,9450	0,4307	0,0917	0,4669
	0,9	0,9696	0,5405	0,0906	0,5290
TT	0,1	0,6369	0,6763	0,4989	0,5305
	0,2	0,4855	0,4509	0,4627	0,4872
	0,3	0,5881	0,6039	0,5515	0,5670
	0,4	0,8058	0,4664	0,0889	0,4950
	0,5	0,8132	0,5409	0,3569	0,5103



**Tabel 5.15:** (Lanjutan)

Fungsi Percobaan	$\rho$	$R^2$		$RMSE$	
		$\Sigma_{MK}$	$\Sigma_{TMK}$	$\Sigma_{MK}$	$\Sigma_{TMK}$
TT	0,6	0,8230	0,4495	0,3538	0,4660
	0,7	0,8293	0,4648	0,3561	0,4833
	0,8	0,9629	0,5093	0,3557	0,5404
	0,9	0,9445	0,5015	0,3530	0,5265
PP	0,1	0,6605	0,6736	0,5456	0,5544
	0,2	0,4270	0,3831	0,5114	0,4771
	0,3	0,5022	0,5145	0,5711	0,6033
	0,4	0,9427	0,4775	0,3543	0,4573
	0,5	0,9308	0,5495	0,0100	0,4809
	0,6	0,9169	0,5374	0,0100	0,5120
	0,7	0,9173	0,5319	0,0100	0,4783
	0,8	0,9517	0,4593	0,0100	0,5394
	0,9	0,9818	0,4585	0,0100	0,5021
ET	0,1	0,4074	0,3984	0,4824	0,4683
	0,2	0,6366	0,6549	0,5948	0,6053
	0,3	0,5050	0,4641	0,5973	0,6263
	0,4	0,6868	0,3085	0,0100	0,4792
	0,5	0,6789	0,4481	0,3457	0,4720
	0,6	0,6878	0,3543	0,3441	0,5009
	0,7	0,7086	0,4186	0,3621	0,5301
	0,8	0,7098	0,3599	0,3228	0,4609
	0,9	0,7878	0,4456	0,3178	0,4484
EP	0,1	0,3700	0,3574	0,5704	0,5150
	0,2	0,3344	0,3264	0,5137	0,5230
	0,3	0,5551	0,5526	0,5090	0,4807
	0,4	0,9131	0,5612	0,3453	0,4810
	0,5	0,9145	0,5647	0,2864	0,4710
	0,6	0,8945	0,4466	0,2802	0,4919
	0,7	0,9001	0,4949	0,2995	0,4482
	0,8	0,9522	0,4782	0,2328	0,4527
	0,9	0,9595	0,5725	0,2035	0,4827
TP	0,1	0,4768	0,4618	0,4563	0,4111
	0,2	0,6683	0,6997	0,6200	0,5739
	0,3	0,4267	0,4182	0,5760	0,6084
	0,4	0,6073	0,3210	0,3005	0,5321
	0,5	0,6231	0,4814	0,5753	0,4492
	0,6	0,6336	0,4496	0,5784	0,4844
	0,7	0,6967	0,4236	0,5695	0,5150
	0,8	0,7037	0,3351	0,4767	0,4626
	0,9	0,7339	0,3460	0,3516	0,5212



Hasil simulasi pada Tabel 5.15 di atas, terlihat adanya perbedaan pada penggunaan matriks varians-kovarians.

1. Pada kondisi korelasi  $|\rho|$  antara 0,1-0,3 terlihat bahwa nilai  $R^2$  dan  $RMSE$  memiliki nilai yang hampir sama baik untuk matriks varians-kovarians *random error*  $\Sigma_{MK}$  mempertimbangkan korelasi antar respon, maupun matriks varians-kovarians *random error*  $\Sigma_{TMK}$  tidak mempertimbangkan korelasi antar respon.
2. Pada kondisi korelasi  $|\rho|$  antara 0,4-0,9 terlihat bahwa nilai  $R^2$  dan  $RMSE$  penggunaan matriks varians-kovarians *random error*  $\Sigma_{MK}$  mempertimbangkan korelasi antar respon lebih baik dibandingkan penggunaan matriks varians-kovarians *random error*  $\Sigma_{TMK}$  tidak mempertimbangkan korelasi antar respon.

Hal ini menunjukkan bahwa penggunaan estimator *spline* birespon akan memberikan hasil yang kurang efektif pada tingkat korelasi  $|\rho|$  antara 0,1-0,3.

Akan tetapi, penggunaan matriks varians-kovarians *random error*  $\Sigma_{MK}$  mempertimbangkan korelasi antar respon tepat untuk digunakan pada kondisi tingkat korelasi  $|\rho|$  di atas 0,3. Tabel 5.15 juga memperlihatkan bahwa semakin tinggi tingkat korelasi, semakin tinggi pula nilai  $R^2$  yang dihasilkan.

Simulasi selanjutnya dilakukan pada dua kondisi yaitu Kelompok 1, adalah simulasi dengan nilai korelasi rendah yaitu  $-0,3 \leq \rho \leq -0,1$  dan  $0,1 \leq \rho \leq 0,3$ , serta Kelompok 2, adalah simulasi dengan nilai korelasi tinggi yaitu  $-0,9 \leq \rho \leq -0,4$  dan  $0,4 \leq \rho \leq 0,9$ . Hasil simulasi disajikan secara lengkap pada Tabel 5.16.



**Tabel 5.16:** Nilai  $R^2$  &  $RMSE$  Tingkat Korelasi Rendah dan Tinggi

Fungsi Percobaan	$\rho$	$R^2$		$RMSE$	
		$\Sigma_{MK}$	$\Sigma_{TMK}$	$\Sigma_{MK}$	$\Sigma_{TMK}$
EE	Rendah	0,5294	0,5144	0,5552	0,5379
	Tinggi	0,9433	0,5192	0,0943	0,5015
TT	Rendah	0,5976	0,6015	0,5273	0,5476
	Tinggi	0,8914	0,4974	0,3122	0,5125
PP	Rendah	0,5468	0,5308	0,5488	0,5461
	Tinggi	0,9470	0,5024	0,0680	0,5168
ET	Rendah	0,5307	0,5156	0,5749	0,5868
	Tinggi	0,7105	0,3906	0,2975	0,4864
EP	Rendah	0,4275	0,4292	0,5570	0,5146
	Tinggi	0,9638	0,5345	0,2748	0,4793
TP	Rendah	0,5494	0,5318	0,5589	0,5416
	Tinggi	0,6932	0,4030	0,4793	0,5178

Hasil simulasi pada Tabel 5.16 di atas, terlihat adanya perbedaan pada penggunaan matriks varians-kovarians.

1. Pada kondisi nilai korelasi rendah yaitu  $-0,3 \leq \rho \leq -0,1$  dan  $0,1 \leq \rho \leq 0,3$  terlihat bahwa nilai  $R^2$  dan  $RMSE$  memiliki nilai yang hampir sama baik untuk matriks varians-kovarians *random error*  $\Sigma_{MK}$  mempertimbangkan korelasi antar respon, maupun matriks varians-kovarians *random error*  $\Sigma_{TMK}$  tidak mempertimbangkan korelasi antar respon.
2. Pada kondisi nilai korelasi tinggi yaitu  $-0,9 \leq \rho \leq -0,4$  dan  $0,4 \leq \rho \leq 0,9$  terlihat bahwa nilai  $R^2$  dan  $RMSE$  penggunaan matriks varians-kovarians *random error*  $\Sigma_{MK}$  mempertimbangkan korelasi antar respon lebih baik dibandingkan penggunaan matriks varians-kovarians *random error*  $\Sigma_{TMK}$  tidak mempertimbangkan korelasi antar respon.

Hal ini menunjukkan bahwa penggunaan estimator *spline* birespon akan memberikan hasil yang kurang efektif pada tingkat korelasi rendah yaitu  $-0,3 \leq \rho \leq -0,1$  dan  $0,1 \leq \rho \leq 0,3$ . Akan tetapi, penggunaan matriks varians-kovarians *random error*  $\Sigma_{MK}$  mempertimbangkan korelasi antar respon tepat untuk digunakan pada kondisi tingkat korelasi  $-0,9 \leq \rho \leq -0,4$  dan  $0,4 \leq \rho \leq 0,9$ .



## 5.2. Aplikasi Estimator *Spline* Birespon pada Data Penderita TB Paru

Kajian terapan bagian pertama adalah mengaplikasikan model regresi nonparametrik birespon pada data pasien penderita TB paru. Data pada penelitian ini menggunakan hasil penelitian Chozin (2012) tentang pasien penderita penyakit TB paru tahun 2011 disajikan secara lengkap pada Lampiran 5.1, output program R pada Lampiran 5.2, dan output estimasi pada Lampiran 5.3.

### 5.2.1. Deskripsi Data Penderita TB Paru

Pada tahap awal akan disajikan deskripsi dari respon yaitu kadar suPAR ( $y_1$ ) dan jumlah monosit ( $y_2$ ), serta prediktor waktu pengamatan ( $x_1$ ), indeks masa tubuh ( $x_2$ ), dan laju endapan darah ( $x_3$ ) pada tiap subyek (*minimal lesion*, *mod advance*, *far advance*, dan *KP miller*). Deskripsi variabel pada tiap subyek disajikan pada Lampiran 5.4 dan Tabel 5.17-5.20. Keempat subyek atau pasien tersebut mewakili gambaran radiologi foto *thorax* (stadium) yang memperlihatkan luasan lesi dari terendah ke tertinggi sebagai berikut: *minimal lesion* (pasien dengan luasan lesi rendah), *mod advance* (pasien dengan luasan lesi sedang), *far advance* (pasien dengan luasan lesi tinggi), dan *KP miller* (pasien dengan luasan lesi sangat tinggi).

**Tabel 5.17:** Deskripsi Prediktor Indeks Masa Tubuh ( $x_2$ )

Subyek	Rata-Rata	Median	Simpangan Baku	Minimum	Maksimum
<i>Minimal lesion</i>	25,63	25,69	1,19	23,51	27,18
<i>Mod Advance</i>	22,46	22,55	0,40	21,67	23,14
<i>Far Advance</i>	22,17	22,19	0,47	21,37	23,09
<i>KP Miller</i>	18,05	17,90	1,23	16,44	20,00
Keseluruhan	22,08	22,34	2,86	16,44	27,18

**Tabel 5.18:** Deskripsi Prediktor Laju Endapan Darah ( $x_3$ )

Subyek	Rata-Rata	Median	Simpangan Baku	Minimum	Maksimum
<i>Minimal lesion</i>	15,31	13,00	11,66	3,00	42,00
<i>Mod Advance</i>	20,54	18,00	9,20	10,00	40,00
<i>Far Advance</i>	21,54	19,00	9,31	10,00	40,00
<i>KP Miller</i>	90,23	91,00	22,68	52,00	122,00
Keseluruhan	36,90	20,00	34,14	3,00	122,00



**Tabel 5.19:** Deskripsi Respon Kadar suPAR ( $y_1$ )

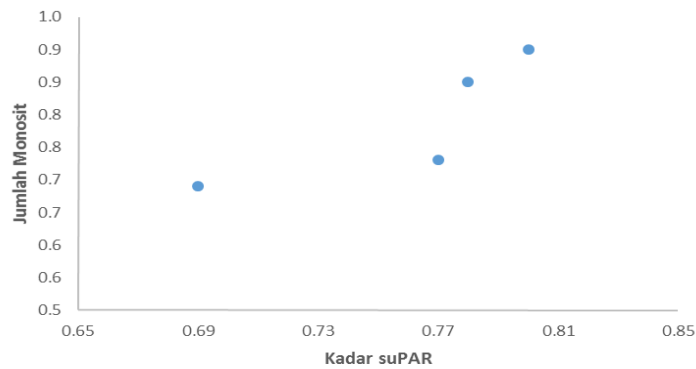
Subyek	Rata-Rata	Median	Simpangan Baku	Minimum	Maksimum
<i>Minimal lesion</i>	0,69	0,61	0,27	0,36	1,20
<i>Mod Advance</i>	0,77	0,75	0,18	0,45	1,00
<i>Far Advance</i>	0,78	0,81	0,24	0,33	1,12
<i>KP Miller</i>	0,80	0,85	0,14	0,50	0,99
Keseluruhan	0,76	0,78	0,21	0,33	1,20

**Tabel 5.20:** Deskripsi Respon Jumlah Monosit ( $y_2$ )

Subyek	Rata-Rata	Median	Simpangan Baku	Minimum	Maksimum
<i>Minimal lesion</i>	0,69	0,67	0,17	0,42	0,94
<i>Mod Advance</i>	0,73	0,70	0,21	0,39	0,98
<i>Far Advance</i>	0,85	0,98	0,34	0,32	1,27
<i>KP Miller</i>	0,90	0,91	0,27	0,44	1,23
Keseluruhan	0,78	0,74	0,26	0,32	1,27

Dari Tabel 5.17-5.18 memperlihatkan bahwa adanya perbedaan nilai tengah (rata-rata dan median) Indeks Masa Tubuh (IMT) pada tiap subyek. Untuk Prediktor IMT, subyek *minimal lesion* memiliki rata-rata kadar IMT sebesar 25,63 kg/m<sup>2</sup> atau dalam kategori berat badan normal (kategori berat badan normal adalah IMT 18,5 hingga 25,9). Pada pasien *moderate advance* memiliki kadar IMT sebesar 22,46 kg/m<sup>2</sup>, dalam kategori berat badan normal. Pada pasien *far advance* memiliki kadar IMT sebesar 22,17 kg/m<sup>2</sup>, dalam kategori berat badan normal. Pada pasien *KP Miller*, memperlihatkan kadar IMT terendah yaitu 18,05 kg/m<sup>2</sup> atau dalam kategori kurus (kategori berat badan kurus adalah IMT 16 hingga 18,4). Hal yang berkebalikan terlihat pada prediktor Laju Endapan Darah, dimana semakin tinggi tingkat lesi, semakin tinggi pula kadar laju endapan darah. Perbedaan cukup mencolok pada pasien *KP Miller* dimana rata-rata mencapai 90,23 mm/jam, dibandingkan pasien lainnya yang berkisar antara 15-21 mm/jam. Hal ini memperlihatkan pasien *KM Miller* yaitu pasien dengan tingkat lesi tertinggi memiliki endapan darah dengan kecepatan yang hampir 4-5 kali lipat dibandingkan pasien lainnya.





**Gambar 5.13:** Nilai Rata-rata Kadar suPAR & Jumlah Monosit

Tabel 5.19-5.20 memperlihatkan adanya perbedaan kadar suPAR dan jumlah monosit pada tiap pasien. Gambar 5.13 memperlihatkan nilai rata-rata kadar suPAR dan jumlah monosit pada tiap subyek. Dari Gambar 5.13 memperlihatkan bahwa semakin tinggi kadar suPAR, semakin tinggi pula jumlah monosit pasien. Hal ini menandakan bahwa kedua respon sebagai penanda biologis pasien TB Paru memiliki keeratan satu sama lainnya.

### 5.2.2. Uji Korelasi dan Uji Linieritas

Dalam pemodelan birespon disyaratkan adanya korelasi yang signifikan antar respon pada tiap subyek. Hasil uji koefisien korelasi *Pearson* menggunakan persamaan (2.23) dan (2.24), dengan output Minitab disajikan secara lengkap pada Lampiran 5.5, dan Tabel 5.21:

**Tabel 5.21:** Uji Korelasi Antar Respon Pada Tiap Subyek & Keseluruhan

	Subyek				Keseluruhan
	1	2	3	4	
<i>r</i>	0,614	0,773	0,588	0,668	0,605
<i>t</i>	2,580	4,041	2,411	2,977	5,373
<i>p</i>	0,026	0,002	0,035	0,013	0,000

Keterangan: \* korelasi signifikan ( $p < 0,05$ )

Besarnya korelasi antara kadar suPAR ( $y_1$ ) dan jumlah monosit ( $y_2$ ) pada tiap subyek adalah berkisar antara 0,588 hingga 0,773 dengan semua nilai  $p < 0,05$ . Di sisi lain, besarnya korelasi antara kadar suPAR ( $y_1$ ) dan jumlah



monosit ( $y_2$ ) pada keseluruhan subyek adalah sebesar 0,605 dan  $p < 0,05$ . Hal ini mengindikasikan bahwa adanya korelasi positif antara kadar suPAR ( $y_1$ ) dan jumlah monosit ( $y_2$ ). Selanjutnya dalam pemodelan data longitudinal disyaratkan adanya autokorelasi yang signifikan antar pengamatan pada subyek yang sama. Hasil uji koefisien autokorelasi menggunakan persamaan (2.25) dan (2.26) pada *time lag* maksimal adalah  $T/4$ , dengan  $T=13$ , maka *time lag* maksimal =  $T/4 = 13/4 = 3$  (*time lag* 1, 2, dan 3), dengan output Minitab disajikan secara lengkap pada Lampiran 5.6, dan Tabel 5.22.

**Tabel 5.22:** Uji Autokorelasi Antar Pengamatan Pada Subyek yang Sama

		Subyek			
		1	2	3	4
Respon Pertama ( $y_1$ )	$Q$	7,905	7,079	4,785	8,628
	$p$	0,048*	0,069	0,188	0,035*
Respon Kedua ( $y_2$ )	$Q$	12,804	8,846	4,830	4,561
	$p$	0,005*	0,031*	0,185	0,207

Keterangan: \* autokorelasi signifikan ( $p < 0,05$ )

Hasil pengujian seperti disajikan pada Tabel 5.22 memperlihatkan adanya autokorelasi antar pengamatan pada subyek yang sama, khususnya pada respon kadar suPAR ( $y_1$ ) subyek ke-1 dan ke-4, serta respon jumlah monosit ( $y_2$ ) subyek ke-1 dan ke-2. Pada tahap berikutnya diuji apakah pola hubungan antara waktu pengamatan ( $x_1$ ), indeks masa tubuh ( $x_2$ ), dan laju endapan darah ( $x_3$ ) terhadap kadar suPAR ( $y_1$ ) dan jumlah monosit ( $y_2$ ) pada keempat pasien dalam bentuk hubungan linier atau non-linier, seperti disajikan pada persamaan (2.27), (2.28), dan (2.29), dengan output R disajikan secara lengkap pada Lampiran 5.7, dan Tabel 5.23.



**Tabel 5.23:** Uji Non-Linieritas *Ramsey Reset Test*

Hubungan	Respon Pertama ( $y_1$ )		Respon Kedua ( $y_2$ )	
	$F$	$p$	$F$	$p$
$x_{11}, x_{21}, x_{31}$ terhadap $y_{11}, y_{21}$	5,317	0,0394*	0,532	0,6094
$x_{12}, x_{22}, x_{32}$ terhadap $y_{12}, y_{22}$	3,146	0,1060	5,584	0,0355*
$x_{13}, x_{23}, x_{33}$ terhadap $y_{13}, y_{23}$	5,016	0,0445*	4,978	0,0452*
$x_{14}, x_{24}, x_{34}$ terhadap $y_{14}, y_{24}$	6,412	0,0261*	0,981	0,4213

Keterangan: \* hubungan non-linier ( $p < 0,05$ )

Tabel 5.23 menyajikan hasil uji *Ramsey Reset Test*, dan memperlihatkan tidak semua hubungan menunjukkan bentuk linier. Dengan demikian, tidak cukup bukti adanya pola hubungan linier digunakan, dan bentuk nonliniernya tidak/belum diketahui. Hal ini menunjukkan alasan yang kuat untuk menggunakan regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal.

### 5.2.3. Hasil Pengujian Estimator *Spline* Birespon Data Penderita TB Paru

Tahap selanjutnya adalah pemilihan orde polinomial *spline* dalam model. Pemilihan berdasarkan nilai  $m = 2, 3, 4, 5$ . Hasil pemilihan orde  $m$  pada menggunakan output R, secara lengkap disajikan pada Lampiran 5.3, dan secara ringkas terangkum pada Tabel 5.24.

**Tabel 5.24:** Pemilihan Orde  $m$  Pada Data Penderita TB Paru

Kriteria	Orde $m$			
	2	3	4	5
$R^2$	0,760	0,8122	<b>0,828</b>	0,819
$RMSE$	0,0528	0,0441	<b>0,0422</b>	0,0492
$GCV$	0,296	0,290	<b>0,263</b>	0,285

Pemilihan orde polinomial *spline* ( $m$ ) = 4 pada Tabel 5.24, terpilih menjadi orde optimal pada model regresi nonparametrik birespon *spline* untuk data longitudinal, berdasarkan atas nilai  $GCV$  dan  $RMSE$  terkecil serta  $R^2$  terbesar. Dengan orde  $m=4$  (kubik) diperoleh nilai  $R^2$  sebesar 0,828 atau 82,8%,  $RMSE$  sebesar 0,0422, dan  $GCV$  sebesar 0,263. Jika hasil estimasi regresi nonparametrik



bi-respon *spline* dibandingkan dengan hasil estimasi regresi parametrik *Linear Mixed Model* (LMM) pada Lampiran 6 dan 7, model regresi nonparametrik bi-respon *spline* lebih baik dibandingkan regresi parametrik LMM. Hal ini terlihat dari nilai  $R^2$  model regresi *spline* lebih tinggi dibandingkan  $R^2$  model regresi parametrik LMM ( $R^2$  regresi *spline* sebesar 0,828; sedangkan  $R^2$  regresi parametrik LMM sebesar 0,339), dan nilai *RMSE* model regresi *spline* lebih rendah dibandingkan *RMSE* model regresi parametrik LMM (*RMSE* regresi *spline* sebesar 0,0422; sedangkan *RMSE* regresi parametrik LMM sebesar 1,396)

**Tabel 5.25:** Pemilihan Parameter Penghalus Pada Data Penderita TB Paru

No	GCV	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{14}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{23}$	$\lambda_{24}$
0	154451,50	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,374	0,354	0,354	0,354	0,354	0,354	0,354	0,354	0,353
2	0,344	0,311	0,355	0,391	0,424	0,379	0,348	0,271	0,349
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
26	0,263	0,004	0,254	0,558	1,033	0,510	0,188	0,061	0,221

Tabel 5.25 menyajikan 26 iterasi nilai parameter penghalus yang meminimumkan *GCV*. Nilai minimum *GCV* 0,263 pada iterasi ke-26, diperoleh pada saat nilai parameter penghalus sebagai berikut.

$$\hat{\lambda}_{11} = 0,004, \hat{\lambda}_{12} = 0,254, \hat{\lambda}_{13} = 0,558, \hat{\lambda}_{14} = 1,033$$

$$\hat{\lambda}_{21} = 0,510, \hat{\lambda}_{22} = 0,188, \hat{\lambda}_{23} = 0,061, \hat{\lambda}_{24} = 0,221$$

Berdasarkan nilai  $R^2$  diperoleh informasi bahwa 82,8% model yang diperoleh dapat menggambarkan hubungan antara  $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$  dengan  $(y_{1i}, y_{2i})$ . Tabel 5.26 menyajikan hasil estimasi parameter  $\hat{q}$  dan  $\hat{c}$ . Model akhir disajikan pada Lampiran 5.14.



**Tabel 5.26:** Estimasi Parameter Model Pada Data Penderita TB Paru

Parameter Model	Respon 1				Respon 2			
	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	$y_{14}$	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	$y_{24}$
$d_{ki1}$	0,001	-0,015	0,001	-0,007	0,005	-0,015	0,002	0,008
$d_{ki2}$	0,091	0,004	0,103	0,001	0,531	-0,005	0,124	-0,002
$d_{ki3}$	-0,015	0,001	-0,007	0,005	0,015	0,002	0,008	-0,002
$d_{ki4}$	0,004	0,103	0,001	0,531	-0,005	0,124	-0,002	-0,266
$c_{ki1}$	-0,283	-0,651	0,224	0,781	0,839	-1,570	0,242	0,162
$c_{ki2}$	0,692	0,255	-0,690	-0,596	-1,436	-0,949	-0,088	-0,123
$c_{ki3}$	-0,651	0,224	0,781	0,839	-1,570	0,242	0,162	0,189
$c_{ki4}$	0,255	-0,690	-0,596	-1,436	-0,949	-0,088	-0,123	-0,306
$c_{ki5}$	0,224	0,781	0,839	1,570	0,242	0,162	0,189	0,280
$c_{ki6}$	-0,690	-0,596	-1,436	-0,949	-0,088	-0,123	-0,306	-0,308
$c_{ki7}$	0,781	0,839	1,570	0,242	0,162	0,189	0,280	0,504
$c_{ki8}$	-0,596	-1,436	-0,949	-0,088	-0,123	-0,306	-0,308	-0,712
$c_{ki9}$	0,839	1,570	0,242	0,162	0,189	0,280	0,504	0,832
$c_{ki10}$	-1,436	-0,949	-0,088	-0,123	-0,306	-0,308	-0,712	-0,792
$c_{ki11}$	1,570	0,242	0,162	0,189	0,280	0,504	0,832	0,503
$c_{ki12}$	-0,949	-0,088	-0,123	-0,306	-0,308	-0,712	-0,792	-0,143
$c_{ki13}$	0,242	0,162	0,189	0,280	0,504	0,832	0,503	-0,207

#### 5.2.4. Validasi Model Data Penderita TB Paru

Dalam pemodelan, hal yang perlu diperhatikan adalah bagaimana membentuk model yang sesuai/tepat menggambarkan fenomena riil yang kompleks bukan memperoleh model yang sempurna. Berdasarkan nilai  $R^2$ ,  $RMSE$ , dan  $GCV$  pada Tabel 5.26 telah diperoleh model terbaik. Tahapan berikutnya yang perlu dilakukan adalah validasi model untuk melihat ketepatan model dalam prediksi. Proses yang dilakukan adalah evaluasi validasi silang (*cross validation*) dengan menghilangkan satu atau dua pengamatan terakhir (*leave one or two out cross validation*), pada setiap subyek. Berdasarkan hasil validasi silang diperoleh nilai *The Root Mean Square Error of Prediction (RMSEP)* pada persamaan (2.22) yang dijadikan indikasi kelayakan model. Hasil validasi silang menggunakan output R, dan secara ringkas terangkum pada Tabel 5.27.



**Tabel 5.27:** Hasil Validasi Silang Pada Data Penderita TB Paru

No	Waktu Pengamatan	Aktual	Estimator <i>Spline</i> (Nonparametrik)				Estimator LMM (Parametrik)			
			<i>Leave Two Out</i>		<i>Leave One Out</i>		<i>Leave Two Out</i>		<i>Leave One Out</i>	
			Prediksi	Residual	Prediksi	Residual	Prediksi	Residual	Prediksi	Residual
$y_{11}$	12	0,425	0,471	-0,046			0,540	-0,115		
	13	0,613	0,796	-0,183	0,736	-0,123	0,903	-0,290	0,790	-0,177
$y_{12}$	12	0,955	0,947	0,008			1,021	-0,066		
	13	0,745	0,670	0,075	0,739	0,006	0,682	0,063	0,741	0,004
$y_{13}$	12	1,047	0,890	0,157			0,954	0,093		
	13	0,692	0,603	0,089	0,748	-0,056	0,696	-0,004	0,846	-0,154
$y_{14}$	12	0,796	0,814	-0,018			0,895	-0,099		
	13	0,892	0,882	0,010	0,897	-0,005	0,921	-0,029	0,934	-0,042
$y_{21}$	12	0,417	0,517	-0,100			0,703	-0,286		
	13	0,932	0,993	-0,061	0,969	-0,037	1,023	-0,091	0,992	-0,060
$y_{22}$	12	0,923	0,870	0,053			0,903	0,020		
	13	0,662	0,674	-0,012	0,644	0,018	0,677	-0,015	0,702	-0,040
$y_{23}$	12	1,087	0,966	0,121			1,048	0,039		
	13	0,331	0,345	-0,014	0,384	-0,053	0,425	-0,094	0,435	-0,104
$y_{24}$	12	0,667	0,706	-0,039			0,823	-0,156		
	13	1,209	1,201	0,008	1,205	0,004	1,243	-0,034	1,341	-0,132
<i>RMSEP</i>			0,088		0,062		0,134		0,123	

Hasil estimasi validasi silang pada Tabel 5.27 dengan menghapus satu pengamatan terakhir (waktu pengamatan ke-13) diperoleh nilai *RMSEP* sebesar 0,062 (nilai *RMSEP* 1,5 kali dari nilai *RMSE* model yaitu 0,0422 seperti disajikan pada Tabel 5.24), sedangkan hasil validasi silang dengan menghapus dua pengamatan terakhir (waktu pengamatan ke-12 dan ke-13) diperoleh nilai *RMSEP* sebesar 0,088 (nilai *RMSEP* 2 kali dari nilai *RMSEP* model yaitu 0,0422 seperti disajikan pada Tabel 5.24). Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa model yang dihasilkan telah valid yang mampu menggambarkan fenomenal riil yang ada.

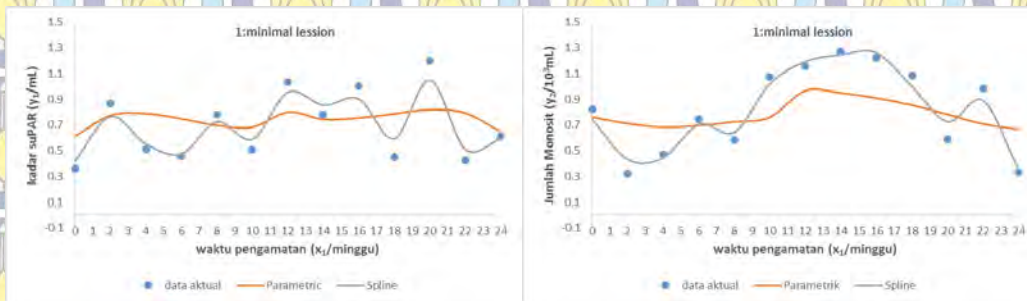
Jika dibandingkan dengan validasi menggunakan model regresi parametrik *Linear Mixed Model* (LMM), terlihat hasil estimator *spline* memiliki nilai *RMSEP* yang lebih rendah dibandingkan regresi parametrik LMM (*RMSEP* regresi *spline* nilai *RMSEP* 0,088 untuk *leave two out*, dan 0,062 untuk *leave one out*; *RMSEP* regresi parametrik LMM nilai *RMSEP* 0,133 untuk *leave two out*, dan 0,123 untuk *leave one out* . Dengan kata lain, hasil validasi silang memperlihatkan bahwa estimator *spline* lebih baik dibandingkan model regresi parametrik LMM.



### 5.2.5. Interpretasi Model

Penjabaran model akhir yang diperoleh untuk model regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal adalah model regresi nonparametrik, melibatkan 2 respon, 4-subjek, dan 13-ulangan untuk orde polinomial *spline*  $m=4$ . Sebelum dilakukan interpretasi dari model akhir yang diperoleh, terlebih dahulu disajikan perbandingan antara model regresi parametrik dan non parametrik, serta perbandingan antara model regresi nonparametrik dengan bobot mempertimbangkan korelasi dan bobot tidak mempertimbangkan korelasi seperti yang telah dijabarkan pada subbab sebelumnya (subbab 3.2.3 langkah c).

Bagian pertama adalah membandingkan model regresi parametrik *Linear Mixed Model* (LMM) dengan regresi nonparametrik *Spline* disajikan pada Lampiran 6, dan salah satu hasil perbandingan pada subyek *Minimal Lesson* disajikan pada Gambar 5.14.



(a)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *Minimal Lesson*

(b)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *Minimal Lesson*

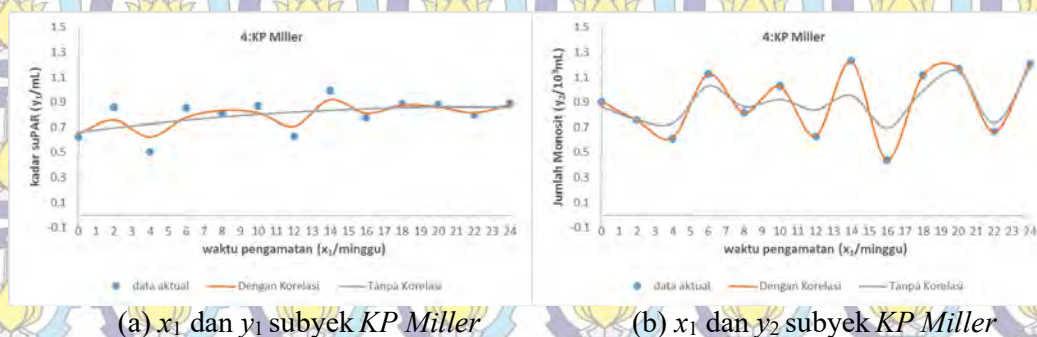
**Gambar 5.14:** Perbandingan Estimasi Regresi Parametrik LMM & Regresi Nonparametrik *Spline* antara  $x_1$  terhadap  $y_1$  &  $y_2$  Pada subyek *Minimal Lesson*

Gambar 5.14 memperlihatkan perbandingan hasil estimasi antara regresi nonparametrik birespon *spline* dan regresi parametrik LMM, terlihat bahwa nilai duga pada model regresi nonparametrik *spline* cukup dekat dengan data aktual, dibandingkan nilai duga pada model regresi parametrik LMM. Hal ini terbukti dengan nilai koefisien determinasi model regresi nonparametrik birespon *spline* sebesar 82,8% jauh lebih tinggi dibandingkan koefisien determinasi model regresi parametrik LMM sebesar 33,9%. Estimasi model regresi parametrik masih bersifat global, belum dapat mengestimasi dengan baik pada setiap titik pengamatan secara mendalam, di sisi lain, estimasi model regresi nonparametrik



*spline* bersifat lokal, sehingga mampu mengestimasi dengan baik pada setiap titik antar pengamatan satu dengan lainnya secara detail.

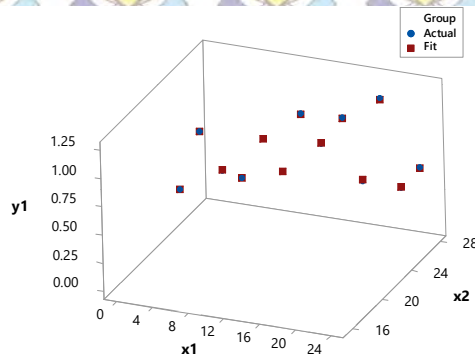
Bagian kedua menyajikan perbandingan antara model regresi nonparametrik dengan bobot mempertimbangkan korelasi dan bobot tidak mempertimbangkan korelasi seperti yang telah dijabarkan pada subbab sebelumnya (subbab 3.2.2 langkah c), secara lengkap disajikan pada Lampiran 5.9, dan salah satu hasil perbandingan pada subyek *KP Miller* disajikan pada Gambar 5.15.



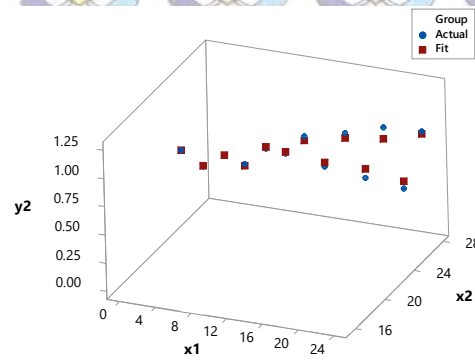
**Gambar 5.15:** Perbandingan Estimasi Regresi Nonparametrik *Spline* dengan Bobot Mempertimbangkan Korelasi & Tanpa Korelasi Antara  $x_1$  terhadap  $y_1$  &  $y_2$  pada subyek *KP Miller*

Gambar 5.15 memperlihatkan perbandingan hasil estimasi antara regresi nonparametrik birespon *spline* dengan bobot mempertimbangkan korelasi (identik dengan matriks varians kovarians *random error*  $\Sigma_{MK}$  pada langkah 2c pada subbab 3.2.2) dibandingkan dengan bobot tidak mempertimbangkan korelasi (identik dengan matriks varians kovarians *random error*  $\Sigma_{TMK}$  pada langkah 2c pada subbab 3.2.2), terlihat bahwa nilai duga pada model regresi nonparametrik *spline* yang mempertimbangkan bobot korelasi birespon cukup dekat dengan data aktual, dibandingkan nilai duga pada model yang tidak mempertimbangkan bobot korelasi birespon. Terlihat pada nilai  $R^2$  sebesar 82,8% pada model regresi nonparametrik birespon *spline* yang mempertimbangkan bobot korelasi birespon jauh lebih tinggi dibandingkan dengan model yang tidak mempertimbangkan bobot korelasi ( $R^2$  sebesar 50,1%), sehingga dapat disimpulkan bahwa model regresi nonparametrik *spline* pada data birespon lebih tepat menggunakan bobot yang mempertimbangkan korelasi antar respon, dibandingkan bobot yang tidak mempertimbangkan korelasi antar respon.

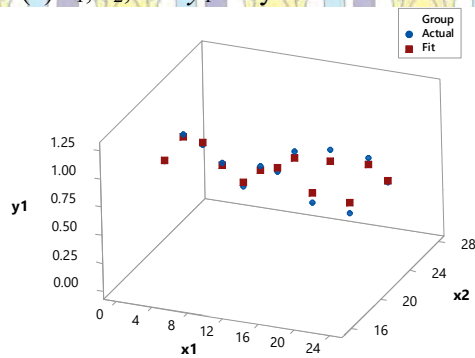




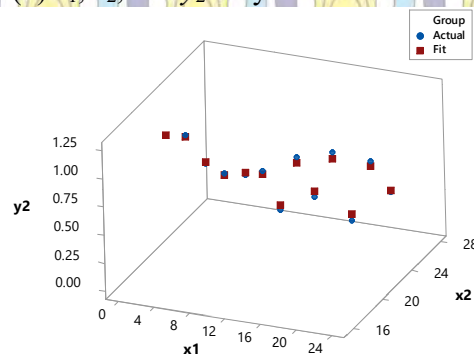
(a)  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $y_1$  subyek *Minimal Lesson*



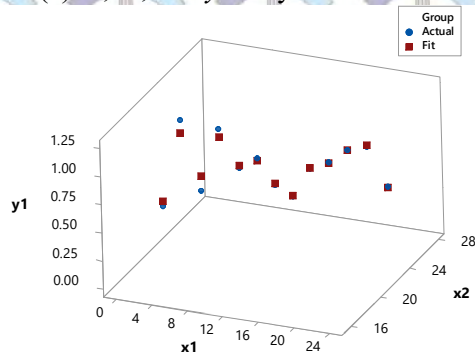
(b)  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $y_2$  subyek *Minimal Lesson*



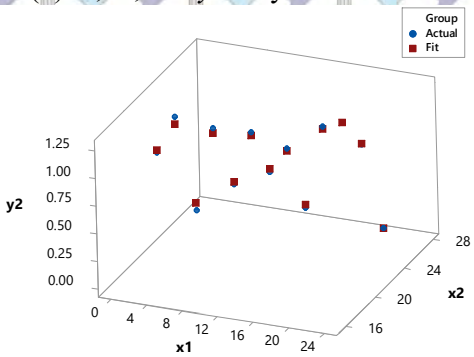
(c)  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $y_1$  subyek *Mod Advance*



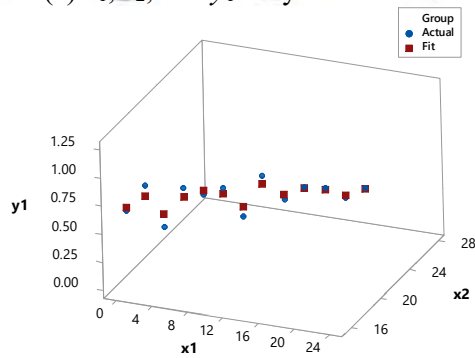
(d)  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $y_2$  subyek *Mod Advance*



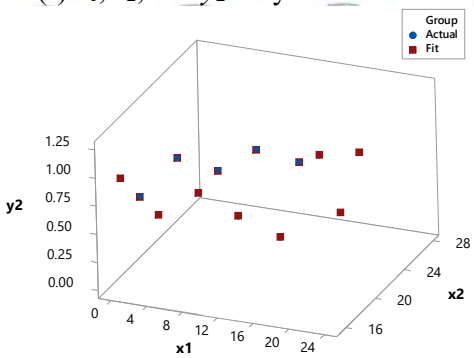
(e)  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $y_1$  subyek *Far Advance*



(f)  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $y_2$  subyek *Far Advance*



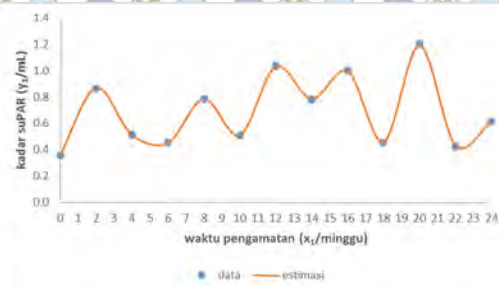
(g)  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $y_1$  subyek *KP Miller*



(h)  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $y_2$  subyek *KP Miller*

**Gambar 5.16:** Estimator *Spline*  $x_1$  &  $x_2$  Terhadap  $y_1$  &  $y_2$  Pada Data TB Paru

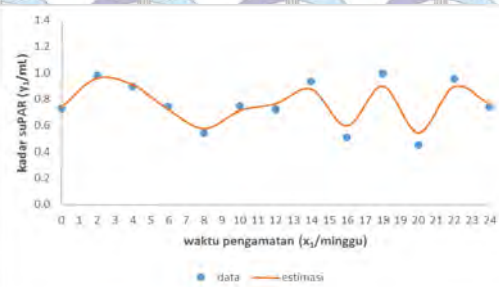




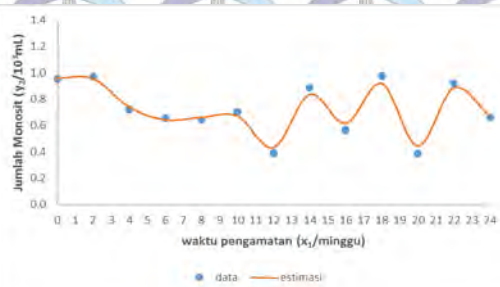
(a)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *Minimal Lesson*



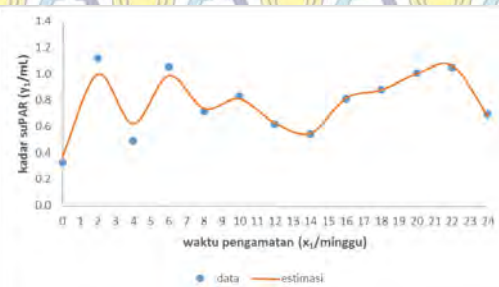
(b)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *Minimal Lesson*



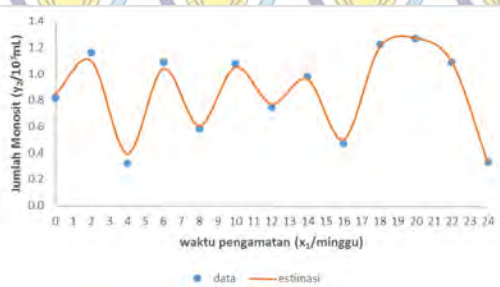
(c)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *Mod Advance*



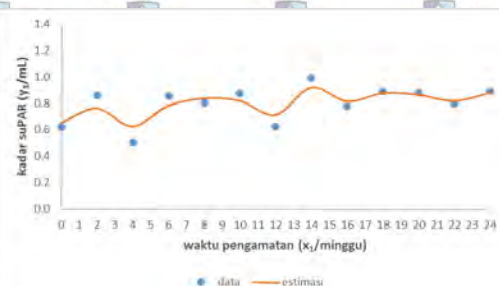
(d)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *Mod Advance*



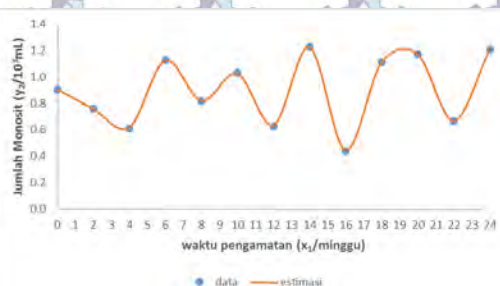
(e)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *Far Advance*



(f)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *Far Advance*



(g)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *KP Miller*



(h)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *KP Miller*

**Gambar 5.17:** Estimator *Spline*  $x_1$  Terhadap  $y_1$  &  $y_2$  Pada Data TB Paru



Plot hasil estimator *spline* birespon untuk data longitudinal diberikan pada Gambar 5.16 untuk visualisasi berdimensi-3 untuk prediktor  $x_1$  dan  $x_2$  (visualisasi berdimensi-3 untuk prediktor  $x_1$  dan  $x_3$  disajikan pada Lampiran 5.12, serta visualisasi berdimensi-3 untuk prediktor  $x_2$  dan  $x_3$  disajikan pada Lampiran 5.13) memperlihatkan hasil estimasi regresi nonparametrik birespon *spline* memberikan nilai duga (*fit*) yang cenderung dekat dengan data aktual, yang memberikan bukti secara visual bahwa model yang diperoleh dari hasil estimasi ini memiliki tingkat prediksi yang sangat baik. Hal ini terlihat dari nilai  $R^2$  sebesar 82,8%.

Plot hasil estimator *spline* birespon untuk data longitudinal diberikan pada Gambar 5.17 untuk visualisasi berdimensi-2 untuk prediktor  $x_1$  (visualisasi berdimensi-2 untuk prediktor  $x_2$  disajikan pada Lampiran 5.10, dan visualisasi berdimensi-2 untuk prediktor  $x_3$  disajikan pada Lampiran 5.11), memperlihatkan pola perilaku yang berbeda pada keempat tipe pasien yaitu *minimal lesion* (level 1), *mod advance* (level 2), *far advance* (level 3), dan *KP Miller* (level 4). Model akhir untuk estimator *spline* disajikan secara lengkap pada Lampiran 5.3.

Penerapan model regresi nonparametrik birespon *spline* untuk data longitudinal pada data TB paru digunakan untuk membantu pemeriksaan klinis lebih lanjut pada periode pemberian terapi OAT (Obat Anti Tuberkulosis), yaitu dalam rentang 0-6 bulan. Di bidang kedokteran, khususnya pada perkembangan ilmu penyakit paru, upaya pengendalian TB paru tergantung dari monitoring kadar suPAR dan jumlah monosit yang tepat, sebagai evaluasi hasil pengobatan. Upaya monitoring kadar suPAR dan jumlah monosit juga diperlukan sebagai bentuk studi prospektif untuk menghindari bias akibat perbedaan status imun pasien. Telah terbukti dari penelitian Astuti, dkk (2008) bahwa kadar suPAR dan jumlah monosit adalah penanda biologis dalam monitoring efektifitas terapi pada penderita TB paru.

Hubungan antara waktu pengamatan ( $x_1$ ) terhadap kadar suPAR ( $y_1$ ) pasien penderita TB paru memperlihatkan periode yang fluktuatif. Pasien dengan kategori *minimal lesion* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,358 mL hingga 1,189 mL) mengalami peningkatan kadar suPAR di dua minggu pertama pengamatan, kemudian cenderung menurun hingga memasuki minggu ke-6,



selanjutnya mengalami peningkatan lagi di minggu ke-8. Kejadian secara periodik terlihat hingga pasien ini mengalami penurunan kadar suPAR hingga minggu ke-22, dan sedikit meningkat pada akhir periode atau minggu ke-24 (6 bulan pengamatan). Hasil yang hampir sama terjadi pada pasien dengan kategori *mod advance* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,545 mL hingga 0,961 mL) dan *far advance* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,370358 mL hingga 1,060 mL), dimana terjadi fluktuatif kadar suPAR secara periodik hingga 6 bulan pengamatan. Sedikit berbeda, pada pasien *KP Miller* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,370 mL hingga 0,923 mL), dimana kadar suPAR relatif stabil pada sepanjang 6 bulan waktu pengamatan.

Hubungan antara waktu pengamatan ( $x_1$ ) terhadap jumlah monosit ( $y_2$ ) pasien penderita TB paru juga memperlihatkan periode yang fluktuatif. Pasien kategori *minimal lesion* (rentang nilai jumlah monosit antara  $0,484 \cdot 10^3$  mL hingga  $0,913 \cdot 10^3$  mL) mengalami penurunan jumlah monosit hingga minggu ke-6, kemudian cenderung meningkat hingga mengalami jumlah monosit tertinggi pada minggu ke-16. Setelah minggu ke-16, jumlah monosit naik turun hingga minggu ke-24 pengamatan. Hasil yang cenderung berbeda tampak pada pasien dengan kategori *mod advance* (rentang nilai jumlah monosit antara  $0,430 \cdot 10^3$  mL hingga  $0,963 \cdot 10^3$  mL) dan *far advance* (rentang nilai jumlah monosit antara  $0,327 \cdot 10^3$  mL hingga  $1,274 \cdot 10^3$  mL), dimana terjadi fluktuatif kadar suPAR secara periodik hingga 6 bulan pengamatan. Sedangkan pada pasien *KP Miller* (rentang nilai jumlah monosit antara  $0,443 \cdot 10^3$  mL hingga  $1,225 \cdot 10^3$  mL), jumlah monosit cenderung menurun hingga pekan ke-4, kemudian meningkat pada periode ke -6, lalu naik turun hingga minggu ke 22, dan meningkat di minggu 24.

Hubungan antara Indeks Masa Tubuh (IMT) ( $x_2$ ) terhadap kadar suPAR ( $y_1$ ) pasien penderita TB paru disajikan pada Lampiran 5.10. Pasien dengan kategori *minimal lesion* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,358 mL hingga 1,189 mL) mengalami peningkatan kadar suPAR pada IMT  $21,5 \text{ kg/m}^2$ , kemudian menurun pada IMT  $22 \text{ kg/m}^2$ , dan meningkat hingga mencapai kadar suPAR tertinggi pada IMT  $22,8 \text{ kg/m}^2$ . Hasil yang hampir sama terjadi pada pasien dengan kategori *mod advance* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,545 mL hingga



0,961 mL) dan *far advance* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,370358 mL hingga 1,060 mL), dimana terjadi fluktuatif kadar suPAR secara periodik pada nilai IMT antara 21,3 hingga 23,1 kg/m<sup>2</sup>. Sedikit berbeda, pada pasien *KP Miller* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,370 mL hingga 0,923 mL), dimana kadar suPAR cenderung meningkat pada nilai IMT antara 16,4 hingga 20,0 kg/m<sup>2</sup>.

Hubungan antara IMT ( $x_2$ ) terhadap jumlah monosit ( $y_2$ ) pasien penderita TB paru juga memperlihatkan periode yang fluktuatif (Lampiran 5.10). Pasien kategori *minimal lesion* (rentang nilai jumlah monosit antara 0,484 10<sup>3</sup>mL hingga 0,913 10<sup>3</sup>mL) mengalami penurunan jumlah monosit pada nilai IMT 21,3 kg/m<sup>2</sup> hingga nilai IMT 21,5 kg/m<sup>2</sup>, kemudian cenderung meningkat hingga mengalami jumlah monosit tertinggi pada IMT 23,1 kg/m<sup>2</sup>. Hasil yang cenderung hampir sama tampak pada pasien dengan kategori *mod advance* (rentang nilai jumlah monosit antara 0,430 10<sup>3</sup>mL hingga 0,963 10<sup>3</sup>mL) dan *far advance* (rentang nilai jumlah monosit antara 0,327 10<sup>3</sup>mL hingga 1,274 10<sup>3</sup>mL), dimana terjadi fluktuatif kadar suPAR pada nilai IMT antara 21,3 hingga 23,1 kg/m<sup>2</sup>. Pada pasien *KP Miller* (rentang nilai jumlah monosit antara 0,443 10<sup>3</sup>mL hingga 1,225 10<sup>3</sup>mL), jumlah monosit cenderung menurun hingga nilai IMT 17 kg/m<sup>2</sup>, kemudian meningkat pada jumlah monosit tertinggi pada nilai IMT 20 kg/m<sup>2</sup>.

Hubungan antara laju endapan darah ( $x_3$ ) terhadap kadar suPAR ( $y_1$ ) pasien penderita TB paru disajikan pada Lampiran 5.11. Pasien dengan kategori *minimal lesion* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,358 mL hingga 1,189 mL) mengalami penurunan kadar suPAR seiring peningkatan laju endapan darah (dari 10 mm/jam menjadi 12,5 mm/jam), kemudian meningkat pada laju endapan darah sebesar 17,5 mm/jam, dan menurun pada laju endapan darah 40 mm/jam. Hasil yang hampir sama terjadi pada pasien dengan kategori *mod advance* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,545 mL hingga 0,961 mL) dan *far advance* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,370358 mL hingga 1,060 mL), dimana terjadi fluktuatif kadar suPAR secara periodik pada laju endapan darah antara 10 hingga 40 mm/jam. Sedikit berbeda, pada pasien *KP Miller* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,370 mL hingga 0,923 mL), dimana kadar suPAR cenderung menurun pada laju endapan darah antara 50 hingga 120 mm/jam.



Hubungan antara laju endapan darah ( $x_3$ ) terhadap jumlah monosit ( $y_2$ ) pasien penderita TB paru juga memperlihatkan periode yang fluktuatif (Lampiran 5.11). Pasien kategori *minimal lession* (rentang nilai jumlah monosit antara  $0,484 \cdot 10^3 \text{ mL}$  hingga  $0,913 \cdot 10^3 \text{ mL}$ ) mengalami penurunan jumlah monosit seiring peningkatan laju endapan darah (laju  $10 \text{ mm/jam}$  sampai  $12,5 \text{ mm/jam}$ ), kemudian cenderung meningkat hingga mengalami jumlah monosit tertinggi pada laju endapan darah  $17,5 \text{ mm/jam}$ . Hasil yang cenderung hampir sama tampak pada pasien dengan kategori *mod advance* (rentang nilai jumlah monosit antara  $0,430 \cdot 10^3 \text{ mL}$  hingga  $0,963 \cdot 10^3 \text{ mL}$ ) dan *far advance* (rentang nilai jumlah monosit antara  $0,327 \cdot 10^3 \text{ mL}$  hingga  $1,274 \cdot 10^3 \text{ mL}$ ), dimana terjadi fluktuatif kadar suPAR pada laju endapan darah antara  $21,3$  hingga  $23,1 \text{ kg/m}^2$ . Pada pasien *KP Miller* (rentang nilai jumlah monosit antara  $0,443 \cdot 10^3 \text{ mL}$  hingga  $1,225 \cdot 10^3 \text{ mL}$ ), jumlah monosit cenderung menurun saat laju endapan darah  $50 \text{ mm/jam}$ , kemudian meningkat pada jumlah monosit tertinggi pada laju endapan darah  $120 \text{ mm/jam}$ .

Model yang diperoleh secara grafis pada Gambar 5.17 dan Lampiran 5.10 dan 5.11 memberikan kesimpulan adanya respon kadar suPAR dan jumlah monosit yang berbeda pada keempat pasien baik dari segi waktu pengamatan, nilai IMT, maupun laju endapan darah. Oleh karena itu, diperlukan pemeriksaan klinis lebih lanjut yang berbeda pula pada tiap pasien. Kedua paparan di atas (respon kadar suPAR dan jumlah monosit) memberikan perbedaan respon pada keempat pasien. Oleh karena itu disarankan adanya perbedaan perlakuan (*treatment*) pada keempat pasien. Di sisi lain, diperlukan evaluasi penyakit TB paru pada rentang yang lebih panjang, mengingat penelitian ini tidak dapat menggeneralisir respon pada periode lebih dari 6 bulan pengamatan.



## BAB 6

### KESIMPULAN, SARAN DAN KEBERLANJUTAN

#### 6.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Model regresi nonparametrik birespon yang melibatkan  $p$  prediktor pada data longitudinal pada persamaan  $y_{kit} = \sum_{\ell=1}^p f_{ki}(x_{kit}) + \varepsilon_{kit}$ , memiliki bentuk fungsi

$$\tilde{f} = \mathbf{T}^* \tilde{d}^* + \mathbf{V}^* \tilde{\varepsilon}^*,$$

dengan

$$\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11}^* & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{12}^* & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{T}_{1N}^* & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{21}^* & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22}^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{T}_{2N}^* \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{ki}^* = \mathbf{T}_{1ki} + \mathbf{T}_{2ki} + \dots + \mathbf{T}_{pki}$$

$$\text{dan } \mathbf{T}_{\ell ki}^* = \begin{pmatrix} \langle \eta_{\ell ki1}, \phi_{\ell ki1} \rangle & \langle \eta_{\ell ki1}, \phi_{\ell ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{\ell ki1}, \phi_{\ell kim} \rangle \\ \langle \eta_{\ell ki2}, \phi_{\ell ki1} \rangle & \langle \eta_{\ell ki2}, \phi_{\ell ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{\ell ki2}, \phi_{\ell kim} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_{\ell kiT}, \phi_{\ell ki1} \rangle & \langle \eta_{\ell kiT}, \phi_{\ell ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{\ell kiT}, \phi_{\ell kim} \rangle \end{pmatrix},$$

$$\tilde{d}^* = (d_{11}^{*T}, d_{12}^{*T}, \dots, d_{1N}^{*T}, d_{21}^{*T}, d_{22}^{*T}, \dots, d_{2N}^{*T})^T, \text{ dengan } d_{ki}^{*T} = (d_{ki1}^*, d_{ki2}^*, \dots, d_{kim}^*).$$



$$\mathbf{V}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11}^* & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_{12}^* & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{V}_{1N}^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{V}_{21}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{V}_{22}^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{V}_{2N}^* \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}_{ki}^* = \mathbf{V}_{1ki} + \mathbf{V}_{2ki} + \dots + \mathbf{V}_{pki}$$

$$\text{dan } \mathbf{V}_{\ell ki} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{\ell ki1}, \xi_{\ell ki1} \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle \xi_{\ell ki2}, \xi_{\ell ki1} \rangle & \langle \xi_{\ell ki2}, \xi_{\ell ki2} \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{\ell kiT}, \xi_{\ell ki1} \rangle & \langle \xi_{\ell kiT}, \xi_{\ell ki2} \rangle & \dots & \langle \xi_{\ell kiT}, \xi_{\ell kiT} \rangle \end{pmatrix},$$

$$\hat{\xi}^* = (\hat{\xi}_{11}^{*T}, \hat{\xi}_{12}^{*T}, \dots, \hat{\xi}_{1N}^{*T}, \hat{\xi}_{21}^{*T}, \hat{\xi}_{22}^{*T}, \dots, \hat{\xi}_{2N}^{*T})^T, \text{ dengan } \hat{\xi}_{ki}^{*T} = (c_{ki1}^*, c_{ki2}^*, \dots, c_{kiT}^*).$$

Adapun estimator *spline* yang memenuhi kriteria meminimumkan PWLS

$$\min_{f_{\ell ki} \in W_2^m[a_{\ell ki}, b_{\ell ki}], k=1,2; \ell=1,2,\dots,p; i=1,2,\dots,N} \left\{ M^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}) + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \left[ \sum_{\ell=1}^p \int_{a_{\ell ki}}^{b_{\ell ki}} [f_{\ell ki}^{(m)}(x_{\ell ki})]^2 dx_{\ell ki} \right] \right\}$$

adalah

$$\hat{\mathbf{f}}_{\hat{\lambda}}^* = \mathbf{T}^* \hat{\mathbf{d}}^* + \mathbf{V}^* \hat{\xi}^* = \mathbf{A}_{\hat{\lambda}}^* \mathbf{y},$$

dengan

$$\mathbf{A}_{\hat{\lambda}}^* = \mathbf{T}^* (\mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} + \mathbf{V}^* \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^* (\mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma} \mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}]$$

$$\hat{\mathbf{d}}^* = (\mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{y},$$

$$\hat{\xi}^* = \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^* (\mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma} \mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{T}^{*T} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1}] \mathbf{y}.$$



Estimasi matriks varians kovarians random error disajikan sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{11,1} & 0 & \dots & 0 & \hat{\Sigma}_{12,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma}_{11,2} & \dots & 0 & 0 & \hat{\Sigma}_{12,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\Sigma}_{11,N} & 0 & 0 & \dots & \hat{\Sigma}_{12,N} \\ \hat{\Sigma}_{12,1} & 0 & \dots & 0 & \hat{\Sigma}_{22,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma}_{12,2} & \dots & 0 & 0 & \hat{\Sigma}_{22,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\Sigma}_{12,N} & 0 & 0 & \dots & \hat{\Sigma}_{22,N} \end{bmatrix},$$

dengan  $\hat{\Sigma}_{kk',i} = W_{kk',i} = \frac{(y_{ki} - \hat{f}_{ki})(y_{k'i} - \hat{f}_{k'i})^T}{T}$ ,  $k=1,2; k'=1,2; i=1,2,\dots,N$ .

2. Kajian terapan pada data simulasi menunjukkan bahwa (1) orde polinomial *spline*  $m=4$  dan  $m=5$  yang paling sering terpilih berdasarkan nilai  $R^2$  tertinggi dan  $RMSE$  terendah. Karakteristik fungsi percobaan polinomial memberikan hasil simulasi lebih baik dibandingkan fungsi percobaan eksponensial dan trigonometri. Karakteristik ukuran sampel  $T=50$  dan  $T=100$  (sampel besar) memberikan hasil simulasi lebih baik dibandingkan ukuran sampel  $T=10$  dan  $T=20$  (sampel kecil), (2) penggunaan estimator *spline* birespon memberikan hasil yang kurang efektif pada tingkat korelasi  $|\rho|$  antara 0,1-0,3 atau kelompok nilai korelasi rendah yaitu  $-0,3 \leq \rho \leq -0,1$  dan  $0,1 \leq \rho \leq 0,3$ . Penggunaan matriks varians-kovarians *random error* yang mempertimbangkan korelasi antar respon tepat untuk digunakan pada kondisi tingkat korelasi  $|\rho|$  di atas 0,3 atau kelompok nilai korelasi tinggi yaitu  $-0,9 \leq \rho \leq -0,4$  dan  $0,4 \leq \rho \leq 0,9$ . Semakin tinggi tingkat korelasi, semakin tinggi pula nilai  $R^2$  yang dihasilkan.
3. Kajian terapan pada data riil menunjukkan bahwa hasil estimator *spline* nonparametrik birespon untuk data longitudinal pada Data Riil pasien penderita TB Paru memiliki koefisien determinasi yang cukup baik (82,8%). Hasil estimasi regresi nonparametrik birespon *spline* memiliki koefisien determinasi yang lebih tinggi dibandingkan regresi parametrik LMM ( $R^2$



sebesar 82,8% dibandingkan 33,9%). Di sisi lain, penggunaan bobot yang mempertimbangkan korelasi antar respon memiliki tingkat determinasi yang lebih tinggi dibandingkan penggunaan bobot yang tidak mempertimbangkan korelasi antar respon ( $R^2$  sebesar 82,8% dibandingkan 50,1%). Model yang dihasilkan memperlihatkan pola perilaku yang berbeda pada keempat tipe pasien yaitu *minimal lesion* (level 1), *mod advance* (level 2), *far advance* (level 3), dan *KP Miller* (level 4). Kadar suPAR pasien penderita TB paru mengalami fluktuatif pada periode waktu pengamatan pada masing-masing pasien dengan tipe *minimal lesion* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,358 mL hingga 1,189 mL), *mod advance* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,545 mL hingga 0,961 mL), *far advance* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,370358 mL hingga 1,060 mL), dan *KP Miller* (rentang nilai kadar suPAR antara 0,370 mL hingga 0,923 mL). Jumlah monosit pasien penderita TB paru juga mengalami fluktuatif pada periode waktu pengamatan dengan tipe *minimal lesion* (rentang nilai jumlah monosit antara 0,484  $10^3$  mL hingga 0,913  $10^3$  mL), *mod advance* (rentang nilai jumlah monosit antara 0,430  $10^3$  mL hingga 0,963  $10^3$  mL), *far advance* (rentang nilai jumlah monosit antara 0,327  $10^3$  mL hingga 1,274  $10^3$  mL), dan *KP Miller* (rentang nilai jumlah monosit antara 0,443  $10^3$  mL hingga 1,225  $10^3$  mL).

## 6.2. Saran

Berdasarkan kesimpulan yang diperoleh dalam disertasi, ada beberapa hal yang disarankan sebagai berikut:

1. Dalam penelitian ini, teori yang dikembangkan dalam estimasi fungsi regresi nonparametrik birespon berdasarkan estimator *spline* menggunakan dua respon. Saran untuk penelitian selanjutnya perlu mengembangkan estimasi model regresi nonparametrik multirespon yang melibatkan lebih dari dua respon.
2. Dalam penelitian ini menetapkan varians *random error* adalah homogen, sehingga disarankan untuk penelitian berikutnya dapat melanjutkan pada



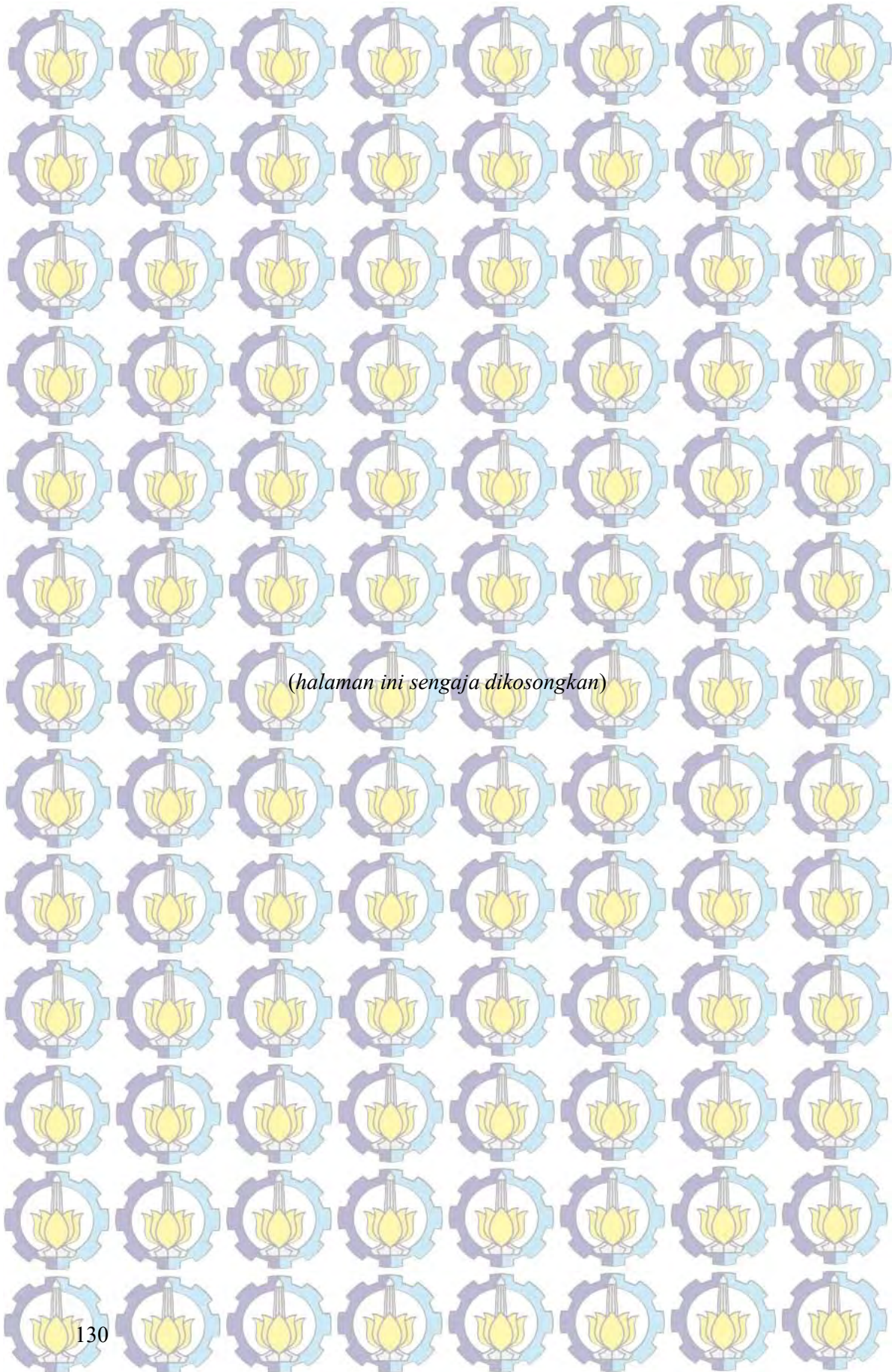
kasus yang sama dengan mempertimbangkan heterogenitas varians *random error*.

3. Dalam penelitian ini membatasi antar prediktor bersifat aditif. Disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat mengembangkan estimator *spline* untuk prediktor bersifat non aditif.
4. Dalam penelitian ini juga membatasi kurva regresi untuk setiap prediktor adalah identik. Disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat mengembangkan estimator *spline* yang mampu mengakomodir bentuk kurva regresi yang berbeda pada setiap prediktor.

### 6.3. Keberlanjutan

Berdasarkan hasil yang diperoleh dan keterbatasan penelitian ini, maka masih dimungkinkan untuk mengembangkan beberapa hal terkait pemodelan regresi nonparametrik birespon *spline* untuk data longitudinal. Pada bagian pertama, Model yang dikembangkan dibatasi pada jumlah pengamatan ( $T$ ) pada setiap subyek adalah sama atau seimbang, sehingga perlu diteliti lanjutan untuk model yang mengakomodir jumlah pengamatan yang tidak seimbang, mengingat seringkali ditemukan penelitian yang melibatkan pengamatan yang tidak seimbang. Pada bagian kedua, penelitian ini mengasumsikan matriks varians-kovarians *error* yang homogen, sehingga masih dapat dikembangkan model regresi nonparametrik birespon *spline* untuk data longitudinal dengan mempertimbangkan matriks varians-kovarians *error* yang tidak homogen. Pada bagian ketiga, penelitian ini mengasumsikan antar prediktor bersifat aditif, sehingga masih dapat dikembangkan regresi nonparametrik birespon *spline* untuk data longitudinal dengan mempertimbangkan antar prediktor bersifat multiplikatif, salah satunya dengan pendekatan *Multivariate Adaptive Regression Spline* (MARS).





*(halaman ini sengaja dikosongkan)*



### Lampiran 1. Matriks Varians-Kovarians *Random Error*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} y_{11t} & y_{12t} & \cdots & y_{1Nt} & y_{21t} & y_{22t} & \cdots & y_{2Nt} \\ y_{11t} & \begin{bmatrix} \Sigma_{11.1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Sigma_{12.1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ y_{12t} & \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{11.2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{12.2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{1Nt} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \Sigma_{11.N} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \Sigma_{12.N} \end{bmatrix} \\ y_{21t} & \begin{bmatrix} \Sigma_{12.1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Sigma_{22.1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ y_{22t} & \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{12.2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{22.2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{2Nt} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \Sigma_{12.N} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \Sigma_{22.N} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{(2NT) \times (2NT)}$$

Pembagian Sub-matriks Varians Kovarians  $\Sigma_{kk,i}$

$\Sigma_{11.1}$	$[y_{111} \ y_{112} \ \cdots \ y_{11T}]$	$[y_{111} \ y_{112} \ \cdots \ y_{11T}]$
$\Sigma_{11.2}$	$[y_{121} \ y_{122} \ \cdots \ y_{12T}]$	$[y_{121} \ y_{122} \ \cdots \ y_{12T}]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\Sigma_{11.N}$	$[y_{1N1} \ y_{1N2} \ \cdots \ y_{1NT}]$	$[y_{1N1} \ y_{1N2} \ \cdots \ y_{1NT}]$
$\Sigma_{22.1}$	$[y_{211} \ y_{212} \ \cdots \ y_{21T}]$	$[y_{211} \ y_{212} \ \cdots \ y_{21T}]$
$\Sigma_{22.2}$	$[y_{221} \ y_{222} \ \cdots \ y_{22T}]$	$[y_{221} \ y_{222} \ \cdots \ y_{22T}]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\Sigma_{22.N}$	$[y_{2N1} \ y_{2N2} \ \cdots \ y_{2NT}]$	$[y_{2N1} \ y_{2N2} \ \cdots \ y_{2NT}]$
$\Sigma_{12.1}$	$[y_{111} \ y_{112} \ \cdots \ y_{11T}]$	$[y_{211} \ y_{212} \ \cdots \ y_{21T}]$
$\Sigma_{12.2}$	$[y_{121} \ y_{122} \ \cdots \ y_{12T}]$	$[y_{221} \ y_{222} \ \cdots \ y_{22T}]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\Sigma_{12.N}$	$[y_{1N1} \ y_{1N2} \ \cdots \ y_{1NT}]$	$[y_{2N1} \ y_{2N2} \ \cdots \ y_{2NT}]$



**Lampiran 1. (Lanjutan)**

**BAGIAN PERTAMA**

$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ \vdots \\ y_{11T} \end{bmatrix}$	$\Sigma_{11,1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11,1(1)}^2 & \sigma_{11,1(1,2)} & \cdots & \sigma_{11,1(1,T)} \\ \sigma_{11,1(2,1)} & \sigma_{11,1(2)}^2 & \cdots & \sigma_{11,1(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{11,1(T,1)} & \sigma_{11,1(T,2)} & \cdots & \sigma_{11,1(T)}^2 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\begin{bmatrix} y_{121} & y_{122} & \cdots & y_{12T} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	...	$\begin{bmatrix} y_{1N1} & y_{1N2} & \cdots & y_{1NT} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$
$\begin{bmatrix} y_{121} \\ y_{122} \\ \vdots \\ y_{12T} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\Sigma_{11,2} = \begin{bmatrix} \sigma_{11,2(1)}^2 & \sigma_{11,2(1,2)} & \cdots & \sigma_{11,2(1,T)} \\ \sigma_{11,2(2,1)} & \sigma_{11,2(2)}^2 & \cdots & \sigma_{11,2(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{11,2(T,1)} & \sigma_{11,2(T,2)} & \cdots & \sigma_{11,2(T)}^2 \end{bmatrix}_{T \times T}$	...	...	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	...
$\begin{bmatrix} y_{1N1} \\ y_{1N2} \\ \vdots \\ y_{1NT} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	...	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	...	$\Sigma_{11,N} = \begin{bmatrix} \sigma_{11,N(1)}^2 & \sigma_{11,N(1,2)} & \cdots & \sigma_{11,N(1,T)} \\ \sigma_{11,N(2,1)} & \sigma_{11,N(2)}^2 & \cdots & \sigma_{11,N(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{11,N(T,1)} & \sigma_{11,N(T,2)} & \cdots & \sigma_{11,N(T)}^2 \end{bmatrix}_{T \times T}$	...



**Lampiran 1. (Lanjutan)**

**BAGIAN KEDUA:**

	$[y_{211} \ y_{212} \ \cdots \ y_{21T}]$	$[y_{221} \ y_{222} \ \cdots \ y_{22T}]$	$\cdots$	$[y_{2N1} \ y_{2N2} \ \cdots \ y_{2NT}]$
$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ \vdots \\ y_{11T} \end{bmatrix}$	$\Sigma_{12,1} = \begin{bmatrix} \sigma_{12,1(1,1)} & \sigma_{12,1(1,2)} & \cdots & \sigma_{12,1(1,T)} \\ \sigma_{12,1(2,1)} & \sigma_{12,1(2,2)} & \cdots & \sigma_{12,1(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{12,1(T,1)} & \sigma_{12,1(T,2)} & \cdots & \sigma_{12,1(T,T)} \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\cdots$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$
$\begin{bmatrix} y_{121} \\ y_{122} \\ \vdots \\ y_{12T} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\Sigma_{12,2} = \begin{bmatrix} \sigma_{12,2(1,1)} & \sigma_{12,2(1,2)} & \cdots & \sigma_{12,2(1,T)} \\ \sigma_{12,2(2,1)} & \sigma_{12,2(2,2)} & \cdots & \sigma_{12,2(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{12,2(T,1)} & \sigma_{12,2(T,2)} & \cdots & \sigma_{12,2(T,T)} \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\cdots$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\begin{bmatrix} y_{1N1} \\ y_{1N2} \\ \vdots \\ y_{1NT} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\cdots$	$\Sigma_{12,N} = \begin{bmatrix} \sigma_{12,N(1,1)} & \sigma_{12,N(1,2)} & \cdots & \sigma_{12,N(1,T)} \\ \sigma_{12,N(2,1)} & \sigma_{12,N(2,2)} & \cdots & \sigma_{12,N(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{12,N(T,1)} & \sigma_{12,N(T,2)} & \cdots & \sigma_{12,N(T,T)} \end{bmatrix}_{T \times T}$



**Lampiran 1. (Lanjutan)**

**BAGIAN KETIGA:**

$\begin{bmatrix} y_{211} \\ y_{212} \\ \vdots \\ y_{21T} \end{bmatrix}$	$\Sigma_{12.1} = \begin{bmatrix} \sigma_{12.1(1,1)} & \sigma_{12.1(1,2)} & \cdots & \sigma_{12.1(1,T)} \\ \sigma_{12.1(2,1)} & \sigma_{12.1(2,2)} & \cdots & \sigma_{12.1(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{12.1(T,1)} & \sigma_{12.1(T,2)} & \cdots & \sigma_{12.1(T,T)} \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\begin{bmatrix} y_{121} & y_{122} & \cdots & y_{12T} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\cdots$	$\begin{bmatrix} y_{1N1} & y_{1N2} & \cdots & y_{1NT} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$
$\begin{bmatrix} y_{221} \\ y_{222} \\ \vdots \\ y_{22T} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\Sigma_{12.2} = \begin{bmatrix} \sigma_{12.2(1,1)} & \sigma_{12.2(1,2)} & \cdots & \sigma_{12.2(1,T)} \\ \sigma_{12.2(2,1)} & \sigma_{12.2(2,2)} & \cdots & \sigma_{12.2(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{12.2(T,1)} & \sigma_{12.2(T,2)} & \cdots & \sigma_{12.2(T,T)} \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\cdots$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\vdots$	$\vdots$
$\begin{bmatrix} y_{2N1} \\ y_{2N2} \\ \vdots \\ y_{2NT} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\cdots$	$\Sigma_{12.N} = \begin{bmatrix} \sigma_{12.N(1,1)} & \sigma_{12.N(1,2)} & \cdots & \sigma_{12.N(1,T)} \\ \sigma_{12.N(2,1)} & \sigma_{12.N(2,2)} & \cdots & \sigma_{12.N(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{12.N(T,1)} & \sigma_{12.N(T,2)} & \cdots & \sigma_{12.N(T,T)} \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\vdots$	$\vdots$



**Lampiran 1. (Lanjutan)**

**BAGIAN KEEMPAT:**

$\begin{bmatrix} y_{211} \\ y_{212} \\ \vdots \\ y_{21T} \end{bmatrix}$	$\Sigma_{22,1} = \begin{bmatrix} \sigma_{22,1(1)}^2 & \sigma_{22,1(1,2)} & \cdots & \sigma_{22,1(1,T)} \\ \sigma_{22,1(2,1)} & \sigma_{22,1(2)}^2 & \cdots & \sigma_{22,1(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{22,1(T,1)} & \sigma_{22,1(T,2)} & \cdots & \sigma_{22,1(T)}^2 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\begin{bmatrix} y_{221} & y_{222} & \cdots & y_{22T} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\cdots$	$\begin{bmatrix} y_{2N1} & y_{2N2} & \cdots & y_{2NT} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$
$\begin{bmatrix} y_{221} \\ y_{222} \\ \vdots \\ y_{22T} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\Sigma_{22,1} = \begin{bmatrix} \sigma_{22,2(1)}^2 & \sigma_{22,2(1,2)} & \cdots & \sigma_{22,2(1,T)} \\ \sigma_{22,2(2,1)} & \sigma_{22,2(2)}^2 & \cdots & \sigma_{22,2(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{22,2(T,1)} & \sigma_{22,2(T,2)} & \cdots & \sigma_{22,2(T)}^2 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\begin{bmatrix} y_{2N1} \\ y_{2N2} \\ \vdots \\ y_{2NT} \end{bmatrix}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\Sigma_{22,1} = \begin{bmatrix} \sigma_{22,N(1)}^2 & \sigma_{22,N(1,2)} & \cdots & \sigma_{22,N(1,T)} \\ \sigma_{22,N(2,1)} & \sigma_{22,N(2)}^2 & \cdots & \sigma_{22,N(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{22,N(T,1)} & \sigma_{22,N(T,2)} & \cdots & \sigma_{22,N(T)}^2 \end{bmatrix}_{T \times T}$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$



### Lampiran 2.1. Implementasi *Spline* dalam Regresi Linier Sederhana

Model sederhana dengan menggunakan data *cross-section*,  $t = 1, 2, \dots, T$  sebagai berikut:

$$y_t = f(x_t) + \varepsilon_t.$$

Asumsikan bahwa data tersebut mengikuti model regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal dapat ditulis kembali menjadi:

$$y_t = \mathcal{L}_x f + \varepsilon_t,$$

dengan  $\mathcal{L}_x f = f(x_t)$ ,  $y_t$  adalah respon,  $\mathcal{L}_x$  fungsional linier terbatas, dan  $f$  adalah fungsi yang tidak/belum diketahui bentuknya dan diasumsikan *smooth* dalam arti termuat di dalam ruang  $\mathcal{H}$  seperti yang dijelaskan pada Definisi 2.2, serta  $\varepsilon_{kit}$  adalah *random error*.

Fungsi  $f$  adalah kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya dan diasumsikan *smooth* dalam arti termuat di dalam ruang  $\mathcal{H}$ . Selanjutnya ruang  $\mathcal{H}$  didekomposisikan menjadi *direct sum* dari dua ruang  $\mathcal{H}_0$  dan  $\mathcal{H}_1$ , yaitu :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \text{ dengan } \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1^\perp.$$

Jika basis untuk ruang  $\mathcal{H}_0$  adalah  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$  dengan  $m$  adalah orde polinomial *spline*, dan basis untuk ruang  $\mathcal{H}_1$  adalah  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T\}$  dengan  $T$  adalah banyaknya waktu pengamatan, maka untuk setiap fungsi  $f \in \mathcal{H}$  secara tunggal menjadi :

$$f = g + h,$$

dengan fungsi  $g \in \mathcal{H}_0$  sebagai berikut:

$$g = \sum_{j=1}^m d_j \phi_j = \underline{\phi}^T \underline{d},$$

untuk suatu konstanta  $d_j$ , dan fungsi  $h \in \mathcal{H}_1$  sebagai berikut:

$$h = \sum_{t=1}^T c_t \xi_t = \underline{\xi}^T \underline{c},$$

untuk suatu konstanta  $c_t$ . Selanjutnya untuk fungsi  $f \in \mathcal{H}$ , secara tunggal dijabarkan sebagai berikut :

$$f = g + h = \sum_{j=1}^m d_j \phi_j + \sum_{t=1}^T c_t \xi_t$$

$$f = \underline{\phi}^T \underline{d} + \underline{\xi}^T \underline{c},$$

dengan vektor-vektor  $\underline{\phi}$ ,  $\underline{d}$ ,  $\underline{\xi}$ ,  $\underline{c}$  berturut-turut diberikan oleh :

$$\underline{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)^T, \text{ dan } \underline{d} = (d_1, d_2, \dots, d_m)^T,$$

$$\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T)^T, \text{ dan } \underline{c} = (c_1, c_2, \dots, c_T)^T.$$

Dengan menjabarkan  $\mathcal{L}_x$  sebagai fungsional linier terbatas pada ruang  $\mathcal{H}$  dan fungsi  $f \in \mathcal{H}$ , maka persamaan (4.6) dapat disajikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x f &= \mathcal{L}_x (g + h) = \mathcal{L}_x g + \mathcal{L}_x h \\ &= g(x_t) + h(x_t) = f(x_t). \end{aligned}$$



### Lampiran 2.1. (Lanjutan)

Berdasarkan Teorema Representasi *Riesz* dan  $\mathcal{L}_x$  adalah fungsional linier terbatas pada ruang  $\mathcal{H}$ , diperoleh nilai tunggal  $\eta_t \in \mathcal{H}$  yang merupakan representasi dari  $\mathcal{L}_x$ , dan memenuhi persamaan:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_x f &= \langle \eta_t, f \rangle \\ &= f(x_t), \quad f \in \mathcal{H}.\end{aligned}$$

$f(x_t)$  dapat dinyatakan menjadi :

$$\begin{aligned}f(x_t) &= \langle \eta_t, f \rangle, \quad \eta_t \in \mathcal{H} \\ &= \langle \eta_t, \phi^T d + \xi^T c \rangle \\ f(x_t) &= \langle \eta_t, \phi^T d \rangle + \langle \eta_t, \xi^T c \rangle, \quad t=1,2,\dots,T\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk  $t=1$ , diperoleh :

$$\begin{aligned}f(x_1) &= \langle \eta_1, \phi^T d \rangle + \langle \eta_1, \xi^T c \rangle \\ &= \left\langle \eta_1, (\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_m) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \eta_1, (\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dots \quad \xi_N) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle \eta_1, (\phi_1 d_1 + \phi_2 d_2 + \dots + \phi_m d_m) \rangle + \langle \eta_1, (\xi_1 c_1 + \xi_2 c_2 + \dots + \xi_N c_N) \rangle \\ &= \langle \eta_1, \phi_1 d_1 \rangle + \langle \eta_1, \phi_2 d_2 \rangle + \dots + \langle \eta_1, \phi_m d_m \rangle + \langle \eta_1, \xi_1 c_1 \rangle + \langle \eta_1, \xi_2 c_2 \rangle + \dots + \langle \eta_1, \xi_N c_N \rangle \\ f(x_1) &= d_1 \langle \eta_1, \phi_1 \rangle + d_2 \langle \eta_1, \phi_2 \rangle + \dots + d_m \langle \eta_1, \phi_m \rangle + c_1 \langle \eta_1, \xi_1 \rangle + c_2 \langle \eta_1, \xi_2 \rangle + \dots + c_N \langle \eta_1, \xi_N \rangle.\end{aligned}$$

Dengan cara yang serupa, untuk  $t=2$  diperoleh :

$$\begin{aligned}f(x_2) &= \langle \eta_2, \phi^T d \rangle + \langle \eta_2, \xi^T c \rangle \\ &= d_1 \langle \eta_2, \phi_1 \rangle + d_2 \langle \eta_2, \phi_2 \rangle + \dots + d_m \langle \eta_2, \phi_m \rangle + c_1 \langle \eta_2, \xi_1 \rangle + c_2 \langle \eta_2, \xi_2 \rangle + \dots + c_N \langle \eta_2, \xi_N \rangle.\end{aligned}$$

Apabila proses diteruskan dengan cara yang serupa, untuk  $t=T$  diperoleh :

$$\begin{aligned}f(x_T) &= \langle \eta_T, \phi^T d \rangle + \langle \eta_T, \xi^T c \rangle \\ &= d_1 \langle \eta_T, \phi_1 \rangle + d_2 \langle \eta_T, \phi_2 \rangle + \dots + d_m \langle \eta_T, \phi_m \rangle + c_1 \langle \eta_T, \xi_1 \rangle + \\ &\quad c_2 \langle \eta_T, \xi_2 \rangle + \dots + c_T \langle \eta_T, \xi_T \rangle.\end{aligned}$$

Akibatnya fungsi  $f$  dalam bentuk :

$$f = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_T) \end{pmatrix}$$



### Lampiran 2.1. (Lanjutan)

$$= \begin{pmatrix} d_1 \langle \eta_1, \phi_1 \rangle + \dots + d_m \langle \eta_1, \phi_m \rangle + c_1 \langle \eta_1, \xi_1 \rangle + \dots + c_T \langle \eta_1, \xi_T \rangle \\ d_1 \langle \eta_2, \phi_1 \rangle + \dots + d_m \langle \eta_2, \phi_m \rangle + c_1 \langle \eta_2, \xi_1 \rangle + \dots + c_T \langle \eta_2, \xi_T \rangle \\ \vdots \\ d_1 \langle \eta_T, \phi_1 \rangle + \dots + d_m \langle \eta_T, \phi_m \rangle + c_1 \langle \eta_T, \xi_1 \rangle + \dots + c_T \langle \eta_T, \xi_T \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \eta_1, \phi_1 \rangle & \langle \eta_1, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_1, \phi_m \rangle \\ \langle \eta_2, \phi_1 \rangle & \langle \eta_2, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_2, \phi_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_T, \phi_1 \rangle & \langle \eta_T, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_T, \phi_m \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle \eta_1, \xi_1 \rangle & \langle \eta_1, \xi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_1, \xi_T \rangle \\ \langle \eta_2, \xi_1 \rangle & \langle \eta_2, \xi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_2, \xi_T \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_T, \xi_1 \rangle & \langle \eta_T, \xi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_T, \xi_T \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_T \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f} = \mathbf{T}\tilde{d} + \mathbf{V}\tilde{c},$$

dengan :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \langle \eta_1, \phi_1 \rangle & \langle \eta_1, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_1, \phi_m \rangle \\ \langle \eta_2, \phi_1 \rangle & \langle \eta_2, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_2, \phi_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_T, \phi_1 \rangle & \langle \eta_T, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_T, \phi_m \rangle \end{pmatrix}, \text{ dan } \tilde{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \langle \eta_1, \xi_1 \rangle & \langle \eta_1, \xi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_1, \xi_T \rangle \\ \langle \eta_2, \xi_1 \rangle & \langle \eta_2, \xi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_2, \xi_T \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_T, \xi_1 \rangle & \langle \eta_T, \xi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_T, \xi_T \rangle \end{pmatrix}, \text{ dan } \tilde{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_T \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{T}$  adalah matriks berukuran  $T \times m$ ,  $\tilde{d}$  adalah vektor berukuran  $m$ ,  $\mathbf{V}$  adalah matriks berukuran  $T \times T$ ,  $\tilde{c}$  adalah vektor berukuran  $T$ . Mengingat  $\langle \eta_i, \xi_i \rangle = \langle \xi_i, \xi_i \rangle$ , maka  $\mathbf{V}$  dapat ditulis menjadi :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \langle \xi_1, \xi_1 \rangle & \langle \xi_1, \xi_2 \rangle & \dots & \langle \xi_1, \xi_T \rangle \\ \langle \xi_2, \xi_1 \rangle & \langle \xi_2, \xi_2 \rangle & \dots & \langle \xi_2, \xi_T \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_T, \xi_1 \rangle & \langle \xi_T, \xi_2 \rangle & \dots & \langle \xi_T, \xi_T \rangle \end{pmatrix}.$$

Matriks  $\mathbf{T}$  memiliki bentuk *reproducing kernel* di ruang  $\mathcal{H}_0$  sebagai berikut:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \langle \eta_1, \phi_1 \rangle & \langle \eta_1, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_1, \phi_m \rangle \\ \langle \eta_2, \phi_1 \rangle & \langle \eta_2, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_2, \phi_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_T, \phi_1 \rangle & \langle \eta_T, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \eta_T, \phi_m \rangle \end{pmatrix}$$

dengan



### Lampiran 2.1. (Lanjutan)

$$\begin{aligned}\langle \eta_t, \phi_j \rangle &= \mathcal{L}_x \phi_j \\ &= \frac{x_t^{j-1}}{(j-1)!}, \text{ dengan } t=1, 2, \dots, T; j=1, 2, \dots, m.\end{aligned}$$

Matriks  $\mathbf{V}$  memiliki bentuk *reproducing kernel* di ruang  $\mathcal{H}_1$  sebagai berikut:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \langle \xi_1, \xi_1 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle \xi_2, \xi_1 \rangle & \langle \xi_2, \xi_2 \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_T, \xi_1 \rangle & \langle \xi_T, \xi_2 \rangle & \dots & \langle \xi_T, \xi_T \rangle \end{pmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned}\langle \xi_t, \xi_s \rangle &= \mathcal{L}_x \xi_s = R_1(x_t, x_s) \\ &= \int_a^b \frac{(x_t - u)_+^{m-1} (x_s - u)_+^{m-1}}{((m-1)!)^2} du, t=1, 2, \dots, T; s=1, 2, \dots, T,\end{aligned}$$

dengan  $(x_t - u)_+^{m-1} = (x_t - u)^{m-1}$  untuk  $x_t - u \geq 0$  atau dapat ditulis  $x_t \geq u$  dan  $(x_t - u)_+^{m-1} = 0$  untuk  $x_t - u < 0$  atau dapat ditulis  $x_t < u$ . Jika  $a \leq u \leq b$ , dan  $a = \min(x_t)$ , maka berlaku  $x_t \geq u$ , sehingga  $(x_t - u)_+^{m-1} = (x_t - u)^{m-1}$ . Pada bagian berikut akan disajikan perhitungan pada berbagai tingkatan orde polinomial *spline* ( $m=2$ ).

Penjabaran untuk  $m=2$  (linier) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\langle \xi_t, \xi_s \rangle &= \int_a^b (x_t - u)(x_s - u) du \\ &= \int_a^b [x_t x_s - x_t u - x_s u + u^2] du \\ &= x_t x_s u - \frac{1}{2} x_t u^2 - \frac{1}{2} x_s u^2 + \frac{1}{3} u^3 \Big|_a^b;\end{aligned}$$

Untuk  $x \in [0, 1]$ , diperoleh  $\langle \xi_t, \xi_s \rangle = x_t x_s - \frac{1}{2} (x_t + x_s) + \frac{1}{3}$ .

Sebagai contoh, model Regresi Nonparametrik, untuk  $p=1, q=1, T=3, m=2$  sebagai berikut:

$$y_t = f(x_t) + \varepsilon_t, \quad t=1, 2, 3$$

bentuk fungsi regresi nonparametrik

$$\tilde{f}(x) = \mathbf{T}\tilde{d} + \mathbf{V}\tilde{c},$$

dengan penjelasan sebagai berikut:



### Lampiran 2.1. (Lanjutan)

**Pertama**, untuk komponen  $\mathbf{T}\tilde{d}$

$\mathbf{T}$  adalah matriks berorde  $(T) \times (m)$  atau  $3 \times 2$  sebagai berikut:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \langle \eta_1, \phi_1 \rangle & \langle \eta_1, \phi_2 \rangle \\ \langle \eta_2, \phi_1 \rangle & \langle \eta_2, \phi_2 \rangle \\ \langle \eta_3, \phi_1 \rangle & \langle \eta_3, \phi_2 \rangle \end{pmatrix}$$

dimana:

$$\langle \eta_t, \phi_j \rangle = \mathcal{L}_x \phi_j = \frac{x_t^{j-1}}{(j-1)!}, \text{ dengan } t = 1, 2, 3; j = 1, 2$$

Dengan demikian matriks  $\mathbf{T}$  dapat disajikan sebagai berikut:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix}$$

$\tilde{d}$  adalah vektor berorde  $m=2$ , diberikan oleh :

$$\tilde{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

Sehingga diperoleh

$$\mathbf{T}\tilde{d} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 + d_2 x_1 \\ d_1 + d_2 x_2 \\ d_1 + d_2 x_3 \end{pmatrix}$$

**Kedua**, untuk komponen  $\mathbf{V}\zeta$

$\mathbf{V}$  adalah matriks berorde  $(T) \times (T)$  atau  $3 \times 3$  sebagai berikut:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \langle \xi_1, \xi_1 \rangle & 0 & 0 \\ \langle \xi_2, \xi_1 \rangle & \langle \xi_2, \xi_2 \rangle & 0 \\ \langle \xi_3, \xi_1 \rangle & \langle \xi_3, \xi_2 \rangle & \langle \xi_3, \xi_3 \rangle \end{pmatrix},$$

Dengan demikian matriks  $\mathbf{V}$  dapat disajikan sebagai berikut:

$$\langle \xi_t, \xi_s \rangle = \mathcal{L}_x \xi_s = R_1(x_t, x_s)$$

$$\text{Untuk } m = 2 \text{ (linier)}, \langle \xi_t, \xi_s \rangle = x_t x_s - \frac{1}{2}(x_t + x_s) + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = x_1^2 - x_1 + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_2, \xi_2 \rangle = x_2^2 - x_2 + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_3, \xi_3 \rangle = x_3^2 - x_3 + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_2, \xi_1 \rangle = x_1 x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_3, \xi_1 \rangle = x_1 x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3) + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_3, \xi_2 \rangle = x_2 x_3 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \frac{1}{3}$$



### Lampiran 2.1. (Lanjutan)

Dari persamaan di atas, akan disajikan satu-persatu

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_1 + \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{3} & x_2^2 - x_2 + \frac{1}{3} & 0 \\ x_1x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3) + \frac{1}{3} & x_2x_3 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \frac{1}{3} & x_3^2 - x_3 + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\tilde{\mathbf{c}}$  adalah vektor berorde  $T=3$ , diberikan oleh :

$$\tilde{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Sehingga diperoleh

$$\mathbf{V}\tilde{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_1 + \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{3} & x_2^2 - x_2 + \frac{1}{3} & 0 \\ x_1x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3) + \frac{1}{3} & x_2x_3 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \frac{1}{3} & x_3^2 - x_3 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}\tilde{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_1(x_1^2 - x_1 + \frac{1}{3}) \\ c_1(x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{3}) + c_2(x_2^2 - x_2 + \frac{1}{3}) \\ c_1(x_1x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3) + \frac{1}{3}) + c_2(x_2x_3 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \frac{1}{3}) + c_3(x_3^2 - x_3 + \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{f}}(x) = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{V}\tilde{\mathbf{c}}$$

$$\tilde{\mathbf{f}}(x) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 + d_2x_1 \\ d_1 + d_2x_2 \\ d_1 + d_2x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1(x_1^2 - x_1 + \frac{1}{3}) \\ c_1(x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{3}) + c_2(x_2^2 - x_2 + \frac{1}{3}) \\ c_1(x_1x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3) + \frac{1}{3}) + c_2(x_2x_3 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \frac{1}{3}) + c_3(x_3^2 - x_3 + \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$$

Dapat ditulis kembali menjadi

$$f(x_1) = d_1 + d_2x_1 + c_1(x_1^2 - x_1 + \frac{1}{3})$$

$$f(x_2) = d_1 + d_2x_2 + c_1(x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{3}) + c_2(x_2^2 - x_2 + \frac{1}{3})$$

$$f(x_3) = d_1 + d_2x_3 + c_1(x_1x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3) + \frac{1}{3}) + c_2(x_2x_3 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \frac{1}{3}) + c_3(x_3^2 - x_3 + \frac{1}{3})$$

Atau dapat ditulis

$$f(x_t) = d_1 + d_2x_t + \sum_{s=0}^{t-1} c_t \left( x_t x_{(t-s)} - \frac{1}{2}(x_t + x_{(t-s)}) + \frac{1}{3} \right), \text{ dengan } t=1, 2, 3$$

Perbandingan dengan regresi linier sederhana, dengan  $m = 2$  sebagai berikut:

$$y_t = f(x_t) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, 3$$

Atau dapat ditulis menjadi

$$y_t = b_1 + b_2x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, 3,$$

dengan  $f(x_t) = a + bx_t$

Sehingga diperoleh

$$f(x_1) = b_1 + b_2x_1$$

$$f(x_2) = b_1 + b_2x_2$$

$$f(x_3) = b_1 + b_2x_3$$



### Lampiran 2.1. (Lanjutan)

Atau dapat ditulis

$$\tilde{f}(x) = \mathbf{X}\tilde{b}, \quad \text{dengan } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Perbandingan dengan regresi nonparametrik *spline*

$$f(x_1) = d_1 + d_2x_1 + c_1 \left( x_1^2 - x_1 + \frac{1}{3} \right)$$

$$f(x_2) = d_1 + d_2x_2 + c_1 \left( x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{3} \right) + c_2 \left( x_2^2 - x_2 + \frac{1}{3} \right)$$

$$f(x_3) = d_1 + d_2x_3 + c_1 \left( x_1x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3) + \frac{1}{3} \right) + c_2 \left( x_2x_3 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \frac{1}{3} \right) + c_3 \left( x_3^2 - x_3 + \frac{1}{3} \right)$$

Atau dapat ditulis

$$f(x_t) = d_1 + d_2x_t + \sum_{s=0}^{t-1} c_t \left( x_t x_{(t-s)} - \frac{1}{2}(x_t + x_{(t-s)}) + \frac{1}{3} \right), \quad \text{dengan } t = 1, 2, 3$$

Pembedanya adalah komponen  $V_C$  yang mengakomodir kehalusan kurva regresi.



## Lampiran 2.2. Implementasi Model Regresi Nonparametrik *Spline* Untuk Data Longitudinal

Model Regresi Nonparametrik, untuk  $p = 1, q = 1, N = 2, T = 3, m = 2$  sebagai berikut:

$$y_{it} = f_i(x_{it}) + \varepsilon_{it}, \text{ dengan } i = 1, 2; t = 1, 2, 3$$

bentuk fungsi regresi nonparametrik

$$\tilde{f}(x) = \mathbf{T}\tilde{d} + \mathbf{V}\tilde{c},$$

dengan penjelasan sebagai berikut:

**Pertama**, untuk komponen  $\mathbf{T}\tilde{d}$

$\mathbf{T}$  adalah matriks berorde  $(NT) \times (Nm)$  atau  $6 \times 4$  sebagai berikut:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{pmatrix}, \text{ dengan } \mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} \langle \eta_{i1}, \phi_{11} \rangle & \langle \eta_{i1}, \phi_{12} \rangle \\ \langle \eta_{i2}, \phi_{11} \rangle & \langle \eta_{i2}, \phi_{12} \rangle \\ \langle \eta_{i3}, \phi_{11} \rangle & \langle \eta_{i3}, \phi_{12} \rangle \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \langle \eta_{11}, \phi_{11} \rangle & \langle \eta_{11}, \phi_{12} \rangle & 0 & 0 \\ \langle \eta_{12}, \phi_{11} \rangle & \langle \eta_{12}, \phi_{12} \rangle & 0 & 0 \\ \langle \eta_{13}, \phi_{11} \rangle & \langle \eta_{13}, \phi_{12} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle \eta_{21}, \phi_{21} \rangle & \langle \eta_{21}, \phi_{22} \rangle \\ 0 & 0 & \langle \eta_{22}, \phi_{21} \rangle & \langle \eta_{22}, \phi_{22} \rangle \\ 0 & 0 & \langle \eta_{23}, \phi_{21} \rangle & \langle \eta_{23}, \phi_{22} \rangle \end{pmatrix}$$

dimana:

$$\langle \eta_{it}, \phi_{ij} \rangle = \mathcal{L}_{x_{it}} \phi_{ij} = \frac{x_{it}^{j-1}}{(j-1)!}, \text{ dengan } t = 1, 2, 3; j = 1, 2$$

Dengan demikian matriks  $\mathbf{T}$  dapat disajikan sebagai berikut:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & 0 & 0 \\ 1 & x_{12} & 0 & 0 \\ 1 & x_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_{21} \\ 0 & 0 & 1 & x_{22} \\ 0 & 0 & 1 & x_{23} \end{pmatrix}$$

$\tilde{d}$  adalah vektor berorde  $Nm$  atau 4, diberikan oleh :

$$\tilde{d} = (\tilde{d}_1^T, \tilde{d}_2^T)^T, \text{ dengan } \tilde{d}_i = \begin{pmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \end{pmatrix},$$

Dengan demikian vektor  $\tilde{d}$  dapat disajikan sebagai berikut:

$$\tilde{d} = (d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22})^T$$



## Lampiran 2.2. (Lanjutan)

Sehingga diperoleh

$$\mathbf{T}\tilde{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & 0 & 0 \\ 1 & x_{12} & 0 & 0 \\ 1 & x_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_{21} \\ 0 & 0 & 1 & x_{22} \\ 0 & 0 & 1 & x_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{21} \\ d_{22} \end{pmatrix}$$

Kedua, untuk komponen  $\mathbf{V}_{\xi}$

$\mathbf{V}$  adalah matriks berorde  $(NT) \times (NT)$  atau  $6 \times 6$  sebagai berikut:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix}, \text{ dengan } \mathbf{V}_i = \begin{pmatrix} \langle \xi_{i1}, \xi_{i1} \rangle & 0 & 0 \\ \langle \xi_{i2}, \xi_{i1} \rangle & \langle \xi_{i2}, \xi_{i2} \rangle & 0 \\ \langle \xi_{i3}, \xi_{i1} \rangle & \langle \xi_{i3}, \xi_{i2} \rangle & \langle \xi_{i3}, \xi_{i3} \rangle \end{pmatrix},$$

Dengan demikian matriks  $\mathbf{V}$  dapat disajikan sebagai berikut:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{11}, \xi_{11} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{12}, \xi_{11} \rangle & \langle \xi_{12}, \xi_{12} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{13}, \xi_{11} \rangle & \langle \xi_{13}, \xi_{12} \rangle & \langle \xi_{13}, \xi_{13} \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \xi_{21}, \xi_{21} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \xi_{22}, \xi_{21} \rangle & \langle \xi_{22}, \xi_{22} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \xi_{23}, \xi_{21} \rangle & \langle \xi_{23}, \xi_{22} \rangle & \langle \xi_{23}, \xi_{23} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle \xi_{it}, \xi_{is} \rangle = \mathcal{L}_{\xi_{it}} \xi_{is} = R_1(x_{it}, x_{is}) = \int_a^b \frac{(x_{it} - u)_+^{m-1} (x_{is} - u)_+^{m-1}}{((m-1)!)^2} du, t = 1, 2, 3; s = 1, 2, 3$$

Untuk  $m = 2$  (linier),  $\langle \xi_{it}, \xi_{is} \rangle = x_{it}x_{is} - \frac{1}{2}(x_{it} + x_{is}) + \frac{1}{3}$

$$\langle \xi_{11}, \xi_{11} \rangle = x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{12}, \xi_{12} \rangle = x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{13}, \xi_{13} \rangle = x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{12}, \xi_{11} \rangle = x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{13}, \xi_{11} \rangle = x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{13}, \xi_{12} \rangle = x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}$$

Dari persamaan di atas, akan disajikan satu-persatu

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3} & x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3} & x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$



## Lampiran 2.2. (Lanjutan)

$\underline{c}$  adalah vektor berorde  $NT$  atau 6, diberikan oleh :

$$\underline{c} = (\underline{c}_1^T, \underline{c}_2^T)^T, \text{ dengan } \underline{c}_i = \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ c_{i3} \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian vektor  $\underline{c}$  dapat disajikan sebagai berikut:

$$\underline{c} = (c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23})^T$$

Sehingga diperoleh

$$\underline{V}\underline{c} = \begin{pmatrix} x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3} & x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3} & x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}_1(x) = \underline{T}_1 \underline{d}_1 + \underline{V}_1 \underline{c}_1$$

$$\underline{f}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \\ 1 & x_{13} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3} & x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3} & 0 \\ x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}_1(x) = \begin{pmatrix} d_{11} + d_{12}x_{11} + c_{11}(x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3}) \\ d_{11} + d_{12}x_{12} + c_{11}(x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}) + c_{12}(x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3}) \\ d_{11} + d_{12}x_{13} + c_{11}(x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}) + c_{12}(x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}) + c_{13}(x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}_2(x) = \underline{T}_2 \underline{d}_2 + \underline{V}_2 \underline{c}_2$$

$$\underline{f}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_{21} \\ 1 & x_{22} \\ 1 & x_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3} & x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3} & 0 \\ x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}_2(x) = \begin{pmatrix} d_{21} + d_{22}x_{21} + c_{21}(x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3}) \\ d_{21} + d_{22}x_{22} + c_{21}(x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3}) + c_{22}(x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3}) \\ d_{21} + d_{22}x_{23} + c_{21}(x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3}) + c_{22}(x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3}) + c_{23}(x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh:

$$\underline{f}(x) = \underline{T}\underline{d} + \underline{V}\underline{c}$$

$$\underline{f}(x) = \begin{pmatrix} d_{11} + d_{12}x_{11} + c_{11}(x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3}) \\ d_{11} + d_{12}x_{12} + c_{11}(x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}) + c_{12}(x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3}) \\ d_{11} + d_{12}x_{13} + c_{11}(x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}) + c_{12}(x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}) + c_{13}(x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3}) \\ d_{21} + d_{22}x_{21} + c_{21}(x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3}) \\ d_{21} + d_{22}x_{22} + c_{21}(x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3}) + c_{22}(x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3}) \\ d_{21} + d_{22}x_{23} + c_{21}(x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3}) + c_{22}(x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3}) + c_{23}(x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$$



### Lampiran 2.2. (Lanjutan)

Dapat ditulis kembali menjadi

$$f_{11}(x) = d_{11} + d_{12}x_{11} + c_{11}\left(x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3}\right)$$

$$f_{12}(x) = d_{11} + d_{12}x_{12} + c_{11}\left(x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}\right) + c_{12}\left(x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3}\right)$$

$$f_{13}(x) = d_{11} + d_{12}x_{13} + c_{11}\left(x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}\right) + c_{12}\left(x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}\right) + c_{13}\left(x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3}\right)$$

$$f_{21}(x) = d_{21} + d_{22}x_{21} + c_{21}\left(x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3}\right)$$

$$f_{22}(x) = d_{21} + d_{22}x_{22} + c_{21}\left(x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3}\right) + c_{22}\left(x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3}\right)$$

$$f_{23}(x) = d_{21} + d_{22}x_{23} + c_{21}\left(x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3}\right) + c_{22}\left(x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3}\right) + c_{13}\left(x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3}\right)$$

Model Regresi Nonparametrik, melibatkan 1 variabel respon, 1 variabel prediktor, 2-subjek, dan 3-pengamatan untuk orde polinomial *spline* 2 ( $m=2$ ) sebagai berikut:

$$y_{it} = f_i(x_{it}) + \varepsilon_{it}, \text{ dengan } i=1, 2; t=1, 2, 3$$

$$f_{it}(x) = d_{i1} + d_{i2}x_{it} + \sum_{s=0}^{t-1} c_{it}\left(x_{it}x_{i(t-s)} - \frac{1}{2}(x_{it} + x_{i(t-s)}) + \frac{1}{3}\right), \text{ dengan } i=1, 2; t=1, 2, 3$$

Model Regresi Nonparametrik, melibatkan 1 variabel respon, 1 variabel prediktor,  $N$ -subjek, dan  $n$ -pengamatan untuk orde polinomial *spline* 2 ( $m=2$ ) sebagai berikut:

$$f_i(x) = d_{i1} + d_{i2}x_{it} + \sum_{s=0}^{t-1} c_{it}\left(x_{it}x_{i(t-s)} - \frac{1}{2}(x_{it} + x_{i(t-s)}) + \frac{1}{3}\right), \text{ dengan } i=1, 2, \dots, N; t=1, 2, \dots, T$$

Model Regresi Nonparametrik, melibatkan 1 variabel respon, 1 variabel prediktor, 2-subjek, dan 3-pengamatan untuk orde polinomial *spline* 2 ( $m=3$ ) sebagai berikut:

$$f_i(x) = d_{i1} + d_{i2}x_{it} + \frac{1}{2}d_{i3}x_{it}^2 + \sum_{s=0}^{t-1} c_{it}\left(\frac{1}{4}x_{it}^2x_{i(t-s)}^2 - \frac{1}{4}(x_{it}^2x_{i(t-s)} + x_{it}x_{i(t-s)}^2) + \frac{1}{12}(x_{it}^2 + 4x_{it}x_{i(t-s)} + x_{i(t-s)}^2) - \frac{1}{8}(x_{it} + x_{i(t-s)}) + \frac{1}{20}\right),$$

dengan  $i=1, 2; t=1, 2, 3$

Model Regresi Nonparametrik, melibatkan 1 variabel respon, 1 variabel prediktor, 2-subjek, dan 3-pengamatan untuk orde polinomial *spline* 2 ( $m=4$ ) sebagai berikut:

$$f_i(x) = d_{i1} + d_{i2}x_{it} + \frac{1}{2}d_{i3}x_{it}^2 + \frac{1}{6}d_{i4}x_{it}^3 + \sum_{s=0}^{t-1} c_{it}\left(\frac{1}{36}x_{it}^3x_{i(t-s)}^3 - \frac{1}{24}(x_{it}^3x_{i(t-s)}^2 + x_{it}^2x_{i(t-s)}^3) + \frac{1}{36}(x_{it}^3x_{i(t-s)} + 3x_{it}^2x_{i(t-s)}^2 + x_{it}x_{i(t-s)}^3) - \frac{1}{144}(x_{it}^3 + 9x_{it}^2x_{i(t-s)} + 9x_{it}x_{i(t-s)}^2 + x_{i(t-s)}^3) + \frac{1}{60}(x_{it}^2 + 3x_{it}x_{i(t-s)} + x_{i(t-s)}^2) - \frac{1}{72}(x_{it} + x_{i(t-s)}) + \frac{1}{252}\right),$$

dengan  $i=1, 2; t=1, 2, 3$

Model Regresi Nonparametrik, melibatkan 2 variabel respon, 1 variabel prediktor,  $n$ -subjek, dan  $T$ -pengamatan untuk orde polinomial *spline* 2 ( $m=2$ ) sebagai berikut:

$$f_{kit}(x) = d_{ki1} + d_{ki2}x_{it} + \sum_{s=0}^{t-1} c_{kit}\left(x_{it}x_{i(t-s)} - \frac{1}{2}(x_{it} + x_{i(t-s)}) + \frac{1}{3}\right),$$

$$\text{dengan } k=1, 2; i=1, 2, \dots, n; t=1, 2, \dots, T$$

Model Regresi Nonparametrik, melibatkan 2 variabel respon, 1 variabel prediktor,  $N$ -subjek, dan  $T$ -pengamatan untuk orde polinomial *spline* 3 ( $m=3$ ) sebagai berikut:



### Lampiran 2.2. (Lanjutan)

$$f_{ki}(x) = d_{ki1} + d_{ki2}x_{kit} + \frac{1}{2}d_{ki3}x_{kit}^2 + \sum_{s=0}^{t-1} c_{kit} \left( \frac{1}{4}x_{it}^2x_{i(t-s)}^2 - \frac{1}{4}(x_{it}^2x_{i(t-s)} + x_{it}x_{i(t-s)}^2) + \frac{1}{12}(x_{it}^2 + 4x_{it}x_{i(t-s)} + x_{i(t-s)}^2) - \frac{1}{8}(x_{it} + x_{i(t-s)}) + \frac{1}{20} \right),$$

dengan  $k = 1, 2; i = 1, 2, \dots, N; t = 1, 2, 3, \dots, T$

Model Regresi Nonparametrik, melibatkan 2 variabel respon, 1 variabel prediktor,  $N$ -subjek, dan  $T$ -pengamatan untuk orde polinomial *spline* 4 ( $m=4$ ) sebagai berikut:

$$f_{ki}(x) = d_{ki1} + d_{ki2}x_{kit} + \frac{1}{2}d_{ki3}x_{kit}^2 + \frac{1}{6}d_{ki4}x_{kit}^3 + \sum_{s=0}^{t-1} c_{kit} \left( \frac{1}{36}x_{it}^3x_{i(t-s)}^3 - \frac{1}{24}(x_{it}^3x_{i(t-s)}^2 + x_{it}^2x_{i(t-s)}^3) + \frac{1}{36}(x_{it}^3x_{i(t-s)} + 3x_{it}^2x_{i(t-s)}^2 + x_{it}x_{i(t-s)}^3) - \frac{1}{144}(x_{it}^3 + 9x_{it}^2x_{i(t-s)} + 9x_{it}x_{i(t-s)}^2 + x_{i(t-s)}^3) + \frac{1}{60}(x_{it}^2 + 3x_{it}x_{i(t-s)} + x_{i(t-s)}^2) - \frac{1}{72}(x_{it} + x_{i(t-s)}) + \frac{1}{252} \right),$$

dengan  $k = 1, 2; i = 1, 2, \dots, N; t = 1, 2, 3, \dots, T$

Model Regresi Nonparametrik, melibatkan 2 variabel respon,  $q$  variabel prediktor,  $N$ -subjek, dan  $T$ -pengamatan untuk orde polinomial *spline* 2 ( $m=2$ ) sebagai berikut:

$$\sum_{\ell=1}^q f_{k\ell}(x_\ell) = \sum_{\ell=1}^q d_{k\ell 1} + d_{k\ell 2}x_{\ell it} + \sum_{s=0}^{t-1} c_{k\ell t} \left( x_{\ell it}x_{\ell i(t-s)} - \frac{1}{2}(x_{\ell it} + x_{\ell i(t-s)}) + \frac{1}{3} \right),$$

dengan  $k = 1, 2; \ell = 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, N; t = 1, 2, \dots, T$



### Lampiran 2.3. Penggunaan Matriks $V_{11}$ Untuk Data Longitudinal

Jika menggunakan kondisi 1 berikut:

$$V_{11} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{111}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{111}, \xi_{112} \rangle & \cdots & \langle \xi_{111}, \xi_{11T} \rangle \\ \langle \xi_{112}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{112}, \xi_{112} \rangle & \cdots & \langle \xi_{112}, \xi_{11T} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{11T}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{11T}, \xi_{112} \rangle & \cdots & \langle \xi_{11T}, \xi_{11T} \rangle \end{pmatrix}.$$

Diperoleh  $f_u(x)$  (dengan  $m=2$ ) sebagai berikut:

$$f_u(x) = d_{i1} + d_{i2}x_{it} + \sum_{s=0}^{T-1} c_{it} \left( x_{it}x_{i|t-s|} - \frac{1}{2}(x_{it} + x_{i|t-s|}) + \frac{1}{3} \right)$$

$f_u(x)$  merupakan fungsi dari  $x_{it}$  untuk  $t = 1, 2, \dots, T$ , dimana respon ke- $t$  ditentukan oleh prediktor ke- $t$ ,  $t-1$ ,  $t-2$ , ...,  $t+1$ ,  $t+2$ , ....

Dengan kata lain

$y_{11}$  ditentukan oleh  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1T}$ ,

$y_{12}$  ditentukan oleh  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1T}$ ,

...

$y_{1T}$  ditentukan oleh  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1T}$ ,

Hal ini yang tidak mungkin terjadi pada data longitudinal, dimana  $t$  menyatakan urutan waktu (*time series*).

Jika menggunakan kondisi 2 berikut:

$$V_{11} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{111}, \xi_{111} \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \langle \xi_{112}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{112}, \xi_{112} \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{11T}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{11T}, \xi_{112} \rangle & \cdots & \langle \xi_{11T}, \xi_{11T} \rangle \end{pmatrix}.$$

Diperoleh  $f_u(x)$  (dengan  $m=2$ ) sebagai berikut:

$$f_u(x) = d_{i1} + d_{i2}x_{it} + \sum_{s=0}^{t-1} c_{it} \left( x_{it}x_{i(t-s)} - \frac{1}{2}(x_{it} + x_{i(t-s)}) + \frac{1}{3} \right)$$

$f_u(x)$  merupakan fungsi dari  $x_{it}$  untuk  $t = 1, 2, \dots, T$ , dimana respon ke- $t$  ditentukan oleh prediktor ke- $t$ ,  $t-1$ ,  $t-2$ , ....

Dengan kata lain

$y_{11}$  ditentukan oleh  $x_{11}$ ,

$y_{12}$  ditentukan oleh  $x_{11}, x_{12}$ ,

...

$y_{1T}$  ditentukan oleh  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1T}$ ,

Matriks ini yang tepat digunakan untuk data longitudinal, dimana  $t$  menyatakan urutan waktu (*time series*).



### Lampiran 2.3 (Lanjutan)

Berikut penjabaran kedua kondisi di atas, dengan contoh model Regresi Nonparametrik, untuk  $p = 1, q = 1, N = 2, T = 3, m = 2$  sebagai berikut:

$$y_{it} = f_i(x_{it}) + \varepsilon_{it}, \text{ dengan } i = 1, 2; t = 1, 2, 3$$

bentuk fungsi regresi nonparametrik

$$\tilde{f}(x) = T\tilde{d} + V\tilde{c},$$

#### Kondisi 1:

Jika menggunakan Matriks  $V_{11}$  berikut:

$$V_{11} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{11}, \xi_{11} \rangle & \langle \xi_{11}, \xi_{12} \rangle & \cdots & \langle \xi_{11}, \xi_{1T} \rangle \\ \langle \xi_{12}, \xi_{11} \rangle & \langle \xi_{12}, \xi_{12} \rangle & \cdots & \langle \xi_{12}, \xi_{1T} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{1T}, \xi_{11} \rangle & \langle \xi_{1T}, \xi_{12} \rangle & \cdots & \langle \xi_{1T}, \xi_{1T} \rangle \end{pmatrix}.$$

Maka

$V$  adalah matriks berorde  $(NT) \times (NnT)$  atau  $6 \times 6$  sebagai berikut:

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_2 \end{pmatrix}, \text{ dengan } V_i = \begin{pmatrix} \langle \xi_{i1}, \xi_{i1} \rangle & \langle \xi_{i1}, \xi_{i2} \rangle & \langle \xi_{i1}, \xi_{i3} \rangle \\ \langle \xi_{i2}, \xi_{i1} \rangle & \langle \xi_{i2}, \xi_{i2} \rangle & \langle \xi_{i2}, \xi_{i3} \rangle \\ \langle \xi_{i3}, \xi_{i1} \rangle & \langle \xi_{i3}, \xi_{i2} \rangle & \langle \xi_{i3}, \xi_{i3} \rangle \end{pmatrix},$$

Dengan demikian matriks  $V$  dapat disajikan sebagai berikut:

$$V = \begin{pmatrix} \langle \xi_{11}, \xi_{11} \rangle & \langle \xi_{11}, \xi_{12} \rangle & \langle \xi_{11}, \xi_{13} \rangle & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{12}, \xi_{11} \rangle & \langle \xi_{12}, \xi_{12} \rangle & \langle \xi_{12}, \xi_{13} \rangle & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{13}, \xi_{11} \rangle & \langle \xi_{13}, \xi_{12} \rangle & \langle \xi_{13}, \xi_{13} \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \xi_{21}, \xi_{21} \rangle & \langle \xi_{21}, \xi_{22} \rangle & \langle \xi_{21}, \xi_{23} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & \langle \xi_{22}, \xi_{21} \rangle & \langle \xi_{22}, \xi_{22} \rangle & \langle \xi_{22}, \xi_{23} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & \langle \xi_{23}, \xi_{21} \rangle & \langle \xi_{23}, \xi_{22} \rangle & \langle \xi_{23}, \xi_{23} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle \xi_{it}, \xi_{is} \rangle = \mathcal{L}_{x_{it}x_{is}} \xi_{is} = R_1(x_{it}, x_{is}) = \int_a^b \frac{(x_{it} - u)_+^{m-1} (x_{is} - u)_+^{m-1}}{((m-1)!)^2} du, t = 1, 2, 3; s = 1, 2, 3$$

Untuk  $m = 2$  (linier),  $\langle \xi_{it}, \xi_{is} \rangle = x_{it}x_{is} - \frac{1}{2}(x_{it} + x_{is}) + \frac{1}{3}$

$$\langle \xi_{11}, \xi_{11} \rangle = x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{12}, \xi_{12} \rangle = x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{13}, \xi_{13} \rangle = x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{12}, \xi_{11} \rangle = \langle \xi_{11}, \xi_{12} \rangle = x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{13}, \xi_{11} \rangle = \langle \xi_{11}, \xi_{13} \rangle = x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{13}, \xi_{12} \rangle = \langle \xi_{12}, \xi_{13} \rangle = x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}$$



### Lampiran 2.3. (Lanjutan)

Dari persamaan di atas, akan disajikan satu-persatu

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3} & x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3} & x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3} & x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3} & x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3} & x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3} & x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3} & x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3} & x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\xi$  adalah vektor berorde  $NT$  atau 6, diberikan oleh :

$$\xi = (\xi_1^T, \xi_2^T)^T, \text{ dengan } \xi_i = \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ c_{i3} \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian vektor  $\xi$  dapat disajikan sebagai berikut:

$$\xi = (c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23})^T$$

Sehingga diperoleh

$$\mathbf{V}\xi = \begin{pmatrix} x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3} & x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3} & x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3} & x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3} & x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3} & x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3} & x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3} & x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3} & x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{pmatrix}$$

$$f_1(x) = \mathbf{T}_1 \mathbf{d}_1 + \mathbf{V}_1 \xi_1$$

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \\ 1 & x_{13} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3} & x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3} & x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3} \\ x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3} & x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3} & x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3} \\ x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{pmatrix}$$

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} d_{11} + d_{12}x_{11} + c_{11}(x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3}) + c_{12}(x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}) + c_{13}(x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}) \\ d_{11} + d_{12}x_{12} + c_{11}(x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}) + c_{12}(x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3}) + c_{13}(x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}) \\ d_{11} + d_{12}x_{13} + c_{11}(x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}) + c_{12}(x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}) + c_{13}(x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$$

$$f_2(x) = \mathbf{T}_2 \mathbf{d}_2 + \mathbf{V}_2 \xi_2$$

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_{21} \\ 1 & x_{22} \\ 1 & x_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3} & x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3} & x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3} \\ x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3} & x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3} & x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3} \\ x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{pmatrix}$$

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} d_{21} + d_{22}x_{21} + c_{21}(x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3}) + c_{22}(x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3}) + c_{23}(x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3}) \\ d_{21} + d_{22}x_{22} + c_{21}(x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3}) + c_{22}(x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3}) + c_{23}(x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3}) \\ d_{21} + d_{22}x_{23} + c_{21}(x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3}) + c_{22}(x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3}) + c_{23}(x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh:



### Lampiran 2.3. (Lanjutan)

$$\tilde{f}(x) = \mathbf{T}\tilde{d} + \mathbf{V}\tilde{c}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} d_{11} + d_{12}x_{11} + c_{11}\left(x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3}\right) + c_{12}\left(x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}\right) + c_{13}\left(x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}\right) \\ d_{11} + d_{12}x_{12} + c_{11}\left(x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}\right) + c_{12}\left(x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3}\right) + c_{13}\left(x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}\right) \\ d_{11} + d_{12}x_{13} + c_{11}\left(x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}\right) + c_{12}\left(x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}\right) + c_{13}\left(x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3}\right) \\ d_{21} + d_{22}x_{21} + c_{21}\left(x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3}\right) + c_{22}\left(x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3}\right) + c_{23}\left(x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3}\right) \\ d_{21} + d_{22}x_{22} + c_{21}\left(x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3}\right) + c_{22}\left(x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3}\right) + c_{23}\left(x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3}\right) \\ d_{21} + d_{22}x_{23} + c_{21}\left(x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3}\right) + c_{22}\left(x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3}\right) + c_{23}\left(x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3}\right) \end{pmatrix}$$

Dapat ditulis kembali menjadi

$$f_{11}(x) = d_{11} + d_{12}x_{11} + c_{11}\left(x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3}\right) + c_{12}\left(x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}\right) + c_{13}\left(x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}\right)$$

$$f_{12}(x) = d_{11} + d_{12}x_{12} + c_{11}\left(x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}\right) + c_{12}\left(x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3}\right) + c_{13}\left(x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}\right)$$

$$f_{13}(x) = d_{11} + d_{12}x_{13} + c_{11}\left(x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}\right) + c_{12}\left(x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}\right) + c_{13}\left(x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3}\right)$$

$$f_{21}(x) = d_{21} + d_{22}x_{21} + c_{21}\left(x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3}\right) + c_{22}\left(x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3}\right) + c_{23}\left(x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3}\right)$$

$$f_{22}(x) = d_{21} + d_{22}x_{22} + c_{21}\left(x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3}\right) + c_{22}\left(x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3}\right) + c_{23}\left(x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3}\right)$$

$$f_{23}(x) = d_{21} + d_{22}x_{23} + c_{21}\left(x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3}\right) + c_{22}\left(x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3}\right) + c_{23}\left(x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3}\right)$$

$$y_{it} = f_i(x_{it}) + \varepsilon_{it}, \text{ dengan } i = 1, 2; t = 1, 2, 3$$

$$f_{it}(x) = d_{i1} + d_{i2}x_{it} + \sum_{s=0}^{T-1} c_{is}\left(x_{it}x_{i|t-s|} - \frac{1}{2}(x_{it} + x_{i|t-s|}) + \frac{1}{3}\right), \text{ dengan } i = 1, 2; t = 1, 2, 3$$

#### Kondisi 2:

Jika menggunakan Matriks  $\mathbf{V}_{11}$  berikut:

$$\mathbf{V}_{11} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{111}, \xi_{111} \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle \xi_{112}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{112}, \xi_{112} \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{11T}, \xi_{111} \rangle & \langle \xi_{11T}, \xi_{112} \rangle & \dots & \langle \xi_{11T}, \xi_{11T} \rangle \end{pmatrix}$$

Maka

$\mathbf{V}$  adalah matriks berorde  $(NT) \times (NnT)$  atau  $6 \times 6$  sebagai berikut:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix}, \text{ dengan } \mathbf{V}_i = \begin{pmatrix} \langle \xi_{i1}, \xi_{i1} \rangle & 0 & 0 \\ \langle \xi_{i2}, \xi_{i1} \rangle & \langle \xi_{i2}, \xi_{i2} \rangle & 0 \\ \langle \xi_{i3}, \xi_{i1} \rangle & \langle \xi_{i3}, \xi_{i2} \rangle & \langle \xi_{i3}, \xi_{i3} \rangle \end{pmatrix},$$

Dengan demikian matriks  $\mathbf{V}$  dapat disajikan sebagai berikut:



### Lampiran 2.3. (Lanjutan)

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{11}, \xi_{11} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{12}, \xi_{11} \rangle & \langle \xi_{12}, \xi_{12} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{13}, \xi_{11} \rangle & \langle \xi_{13}, \xi_{12} \rangle & \langle \xi_{13}, \xi_{13} \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \xi_{21}, \xi_{21} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \xi_{22}, \xi_{21} \rangle & \langle \xi_{22}, \xi_{22} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \xi_{23}, \xi_{21} \rangle & \langle \xi_{23}, \xi_{22} \rangle & \langle \xi_{23}, \xi_{23} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle \xi_{it}, \xi_{is} \rangle = \mathcal{L}_{x_{it}} \xi_{is} = R_1(x_{it}, x_{is}) = \int_a^b \frac{(x_{it} - u)_+^{m-1} (x_{is} - u)_+^{m-1}}{((m-1)!)^2} du, t=1, 2, 3; s=1, 2, 3$$

Untuk  $m = 2$  (linier),  $\langle \xi_{it}, \xi_{is} \rangle = x_{it}x_{is} - \frac{1}{2}(x_{it} + x_{is}) + \frac{1}{3}$

$$\langle \xi_{11}, \xi_{11} \rangle = x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{12}, \xi_{12} \rangle = x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{13}, \xi_{13} \rangle = x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{12}, \xi_{11} \rangle = x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{13}, \xi_{11} \rangle = x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}$$

$$\langle \xi_{13}, \xi_{12} \rangle = x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}$$

Dari persamaan di atas, akan disajikan satu-persatu

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3} & x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3} & x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{c}$  adalah vektor berorde  $NT$  atau 6, diberikan oleh:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1^T, \mathbf{c}_2^T)^T, \text{ dengan } \mathbf{c}_i = \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ c_{i3} \end{pmatrix}$$

Dengan demikian vektor  $\mathbf{c}$  dapat disajikan sebagai berikut:

$$\mathbf{c} = (c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23})^T$$

Sehingga diperoleh

$$\mathbf{V}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3} & x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3} & x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{pmatrix}$$

$$f_1(x) = \mathbf{T}_1 d_1 + \mathbf{V}_1 \mathbf{c}_1$$



### Lampiran 2.3. (Lanjutan)

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \\ 1 & x_{13} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3} & x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3} & 0 \\ x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3} & x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{pmatrix} d_{11} + d_{12}x_{11} + c_{11}(x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3}) \\ d_{11} + d_{12}x_{12} + c_{11}(x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}) + c_{12}(x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3}) \\ d_{11} + d_{12}x_{13} + c_{11}(x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}) + c_{12}(x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}) + c_{13}(x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}_2(x) = \mathbf{T}_2 \tilde{d}_2 + \mathbf{V}_2 \tilde{c}_2$$

$$\tilde{f}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_{21} \\ 1 & x_{22} \\ 1 & x_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3} & x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3} & 0 \\ x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3} & x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}_2(x) = \begin{pmatrix} d_{21} + d_{22}x_{21} + c_{21}(x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3}) \\ d_{21} + d_{22}x_{22} + c_{21}(x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3}) + c_{22}(x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3}) \\ d_{21} + d_{22}x_{23} + c_{21}(x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3}) + c_{22}(x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3}) + c_{23}(x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh:

$$\tilde{f}(x) = \mathbf{T} \tilde{d} + \mathbf{V} \tilde{c}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} d_{11} + d_{12}x_{11} + c_{11}(x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3}) \\ d_{11} + d_{12}x_{12} + c_{11}(x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}) + c_{12}(x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3}) \\ d_{11} + d_{12}x_{13} + c_{11}(x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}) + c_{12}(x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}) + c_{13}(x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3}) \\ d_{21} + d_{22}x_{21} + c_{21}(x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3}) \\ d_{21} + d_{22}x_{22} + c_{21}(x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3}) + c_{22}(x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3}) \\ d_{21} + d_{22}x_{23} + c_{21}(x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3}) + c_{22}(x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3}) + c_{23}(x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$$

Dapat ditulis kembali menjadi

$$f_{11}(x) = d_{11} + d_{12}x_{11} + c_{11}(x_{11}^2 - x_{11} + \frac{1}{3})$$

$$f_{12}(x) = d_{11} + d_{12}x_{12} + c_{11}(x_{11}x_{12} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) + \frac{1}{3}) + c_{12}(x_{12}^2 - x_{12} + \frac{1}{3})$$

$$f_{13}(x) = d_{11} + d_{12}x_{13} + c_{11}(x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{13}) + \frac{1}{3}) + c_{12}(x_{12}x_{13} - \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) + \frac{1}{3}) + c_{13}(x_{13}^2 - x_{13} + \frac{1}{3})$$

$$f_{21}(x) = d_{21} + d_{22}x_{21} + c_{21}(x_{21}^2 - x_{21} + \frac{1}{3})$$

$$f_{22}(x) = d_{21} + d_{22}x_{22} + c_{21}(x_{21}x_{22} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) + \frac{1}{3}) + c_{22}(x_{22}^2 - x_{22} + \frac{1}{3})$$

$$f_{23}(x) = d_{21} + d_{22}x_{23} + c_{21}(x_{21}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{21} + x_{23}) + \frac{1}{3}) + c_{22}(x_{22}x_{23} - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23}) + \frac{1}{3}) + c_{23}(x_{23}^2 - x_{23} + \frac{1}{3})$$

$$y_{it} = f_i(x_{it}) + \varepsilon_{it}, \text{ dengan } i = 1, 2; t = 1, 2, 3$$

$$f_{it}(x) = d_{i1} + d_{i2}x_{it} + \sum_{s=0}^{t-1} c_{is} \left( x_{it}x_{i(t-s)} - \frac{1}{2}(x_{it} + x_{i(t-s)}) + \frac{1}{3} \right), \text{ dengan } i = 1, 2; t = 1, 2, 3$$



## Lampiran 2.4. Contoh Matriks T dan V

```

> library(MASS)
> n<-3
> r<-3
> k<-2
> kr<-k*r
> x11<-c(0,1,2)
> x12<-c(4,5,7)
> x13<-c(6,8,9)
> x1v<-rbind(x11,x12,x13)
> x1<-c(x1v[1,],x1v[2,],x1v[3,],x1v[1,],x1v[2,],x1v[3,])
> id<-rep(c(1:kr),rep(n,kr))
> input<-list(x1=data.frame(x1,id))
>
> RK<-function(dt)
+ {
+   R<-function(s,t)
+   {
+     integrand<-function(u) {s*t-u*(s+t)+u^2}
+     value<-integrate(integrand,lower=0,upper=min(s,t))
+     return(value$value)
+   }
+   nt<-length(dt)
+   Rt<-matrix(c(rep(0,nt*nt)),nt,nt)
+   for (it in 1:nt)
+   {
+     for (jt in 1:nt)
+     {
+       Rt[it,jt]<-R(dt[it],dt[jt])
+     }
+   }
+   return(Rt)
+ }
>
> Jn<-matrix(c(rep(0,kr^2)),kr,kr)
> for (j in 1:kr)
+ {
+   Jn[j,j]<-1
+ }
> In<-diag(n)
> B<-kronecker(Jn,In)
> B<-ginv(B)
>
> #Design Matrix
> T1.calc<-matrix(c(rep(0,n*kr*2*kr)),n*kr,2*kr)
> V1.calc<-matrix(c(rep(0,n*kr*n*kr)),n*kr,n*kr)
>
> for (j in 1:kr)
+ {
+   I<-matrix(c(rep(0,kr^2)),kr,kr)
+   I[j,j]<-1
+   T1.calc<-T1.calc+kronecker(I,cbind(1,input$x1[,1][input$x1$id==j]))
+   V1.calc<-V1.calc+kronecker(I,RK(input$x1[,1][input$x1$id==j]))
+ }
>
> T1.calc
[1,] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12]
[1,] 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
[2,] 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
[3,] 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
[4,] 0 0 1 4 0 0 0 0 0 0 0 0
[5,] 0 0 1 5 0 0 0 0 0 0 0 0
[6,] 0 0 1 7 0 0 0 0 0 0 0 0
[7,] 0 0 0 0 1 6 0 0 0 0 0 0
[8,] 0 0 0 0 1 8 0 0 0 0 0 0
[9,] 0 0 0 0 1 9 0 0 0 0 0 0
[10,] 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
[11,] 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0
[12,] 0 0 0 0 0 0 1 2 0 0 0 0
[13,] 0 0 0 0 0 0 0 0 1 4 0 0
[14,] 0 0 0 0 0 0 0 0 1 5 0 0
[15,] 0 0 0 0 0 0 0 0 1 7 0 0
[16,] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 6 0
[17,] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 8 0
[18,] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 9 0

```



## Lampiran 2.4. (Lanjutan)

> V1.calc

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]	[,9]
[1,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[2,]	0	0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[3,]	0	0.833333	2.666667	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[4,]	0	0.000000	0.000000	21.333333	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[5,]	0	0.000000	0.000000	29.333333	41.666667	0.000000	0	0.000000	0
[6,]	0	0.000000	0.000000	45.333333	66.666667	114.333333	0	0.000000	0
[7,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	72	0.000000	0
[8,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	108	170.666667	0
[9,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	126	202.666667	243
[10,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[11,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[12,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[13,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[14,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[15,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[16,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[17,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[18,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0

	[,11]	[,12]	[,13]	[,14]	[,15]	[,16]	[,17]	[,18]
[1,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[2,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[3,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[4,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[5,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[6,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[7,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[8,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[9,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[10,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[11,]	0	0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[12,]	0	0.833333	2.666667	0.000000	0.000000	0	0.000000	0
[13,]	0	0.000000	0.000000	21.333333	0.000000	0	0.000000	0
[14,]	0	0.000000	0.000000	29.333333	41.666667	0	0.000000	0
[15,]	0	0.000000	0.000000	45.333333	66.666667	114.333333	0	0.000000
[16,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	72	0.000000
[17,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	108	170.666667
[18,]	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	126	202.666667



### Lampiran 3. Jumlah Penderita Baru TB Paru Per 100.000 Populasi Tahun 2014

Estimated epidemiological burden of TB, 2014. Best estimates are followed by the lower and upper bounds of the 95% uncertainty interval. Rates per 100 000 population except where indicated.

	POPULATION (THOUSANDS)	MORTALITY <sup>a</sup>		HIV-POSITIVE TB MORTALITY		PREVALENCE		INCIDENCE		HIV PREVALENCE IN INCIDENT TB CASES (%)	
Afghanistan	31 628	44	32–57	0.3	0.2–0.3	340	178–555	189	167–212	0.5	0.4–0.7
Bangladesh <sup>b</sup>	159 078	51	37–68	0.1	0–0.1	404	211–659	227	200–256	0.2	0.1–0.2
Brazil	206 078	2.6	2.4–2.7	1.2	0.9–1.6	52	25–89	44	42–46	17	16–19
Cambodia	15 328	58	41–78	5.3	4.1–6.7	668	565–780	390	353–428	3.0	2.8–3.2
China	1 369 436	2.8	2.7–2.9	<0.1	0–0.1	89	78–102	68	63–73	1.4	1.2–1.7
DR Congo	74 877	69	50–90	8.4	6.7–10	532	282–859	325	295–356	14	11–17
Ethiopia	96 959	33	23–44	5.7	4.6–7.0	200	161–243	207	168–250	9.3	8.2–10
India	1 295 292	17	12–27	2.4	2.0–2.9	195	131–271	167	156–179	5.0	4.5–5.4
Indonesia	254 455	41	26–59	8.5	5.2–13	647	513–797	399	274–546	6.2	5.1–7.5
Kenya	44 864	21	15–28	18	14–22	266	142–427	246	240–252	36	34–38
Mozambique	27 216	67	44–96	134	106–165	554	295–893	551	435–680	57	50–63
Myanmar	53 437	53	38–70	7.7	6.1–9.5	457	352–575	369	334–406	9.7	7.9–12
Nigeria	177 476	97	51–156	44	30–61	330	253–417	322	189–488	18	15–22
Pakistan	185 044	26	6.0–61	0.7	0.4–1.0	341	285–402	270	201–350	1.3	1–1.5
Philippines	99 139	10	9.1–11	<0.1	0–0.1	417	367–471	288	254–324	0.9	0.7–1.1
Russian Federation	143 429	11	11–11	0.7	0.6–0.9	109	49–192	84	76–93	4.6	3.8–5.3
South Africa	53 969	44	41–48	134	107–164	696	390–1 090	834	737–936	61	56–66
Thailand	67 726	11	5.7–18	6.6	3.4–11	236	161–326	171	90–276	13	12–14
Uganda	37 783	12	8.4–16	17	13–21	159	87–253	161	141–183	45	42–48
UR Tanzania	51 823	58	26–104	53	30–84	528	215–979	327	155–561	37	32–42
Viet Nam	92 423	18	12–25	2	1.4–2.7	198	83–362	140	116–167	5.4	5–5.9
Zimbabwe	15 246	15	9.5–22	34	21–51	292	158–465	278	193–379	60	55–65
High-burden countries	4 552 704	21	17–24	6.9	6.1–7.8	227	203–253	176	165–188	12	10–13
AFR	963 361	46	36–58	32	28–36	330	288–375	281	250–313	32	28–37
AMR	981 613	1.7	1.6–1.8	0.6	0.5–0.7	36	28–45	28	27–29	13	12–14
EMR	635 745	14	6.8–23	0.5	0.4–0.6	160	139–183	117	96–140	1.7	1.3–2.2
EUR	907 279	3.7	3.6–3.8	0.3	0.3–0.4	48	36–61	37	35–39	5.9	5.4–6.5
SEAR	1 906 087	24	19–30	3.3	2.7–3.9	286	233–343	211	192–232	5.2	4.3–6.1
WPR	1 845 184	4.8	4.4–5.1	0.3	0.2–0.3	116	104–128	85	80–89	2.0	1.8–2.3
Global	7 239 269	16	13–18	5.3	4.8–5.9	174	158–190	133	126–141	12	11–13

<sup>a</sup> Mortality excludes deaths among HIV-positive TB cases. Deaths among HIV-positive TB cases are classified as HIV deaths according to ICD-10 and are shown separately in this table.

<sup>b</sup> For Bangladesh, a joint reassessment of estimates of TB disease burden will be undertaken following completion of the national TB prevalence survey.

#### Penjelasan masing-masing kolom

1. Nama Negara
2. Jumlah Populasi (ribu orang)
3. Tingkat Kematian
4. Penderita TB Paru yang positif HIV
5. Prevalensi (Jumlah Pasien kambuhan, per 100.000 penduduk)
6. Incidence (Jumlah Pasien Paru, per 100.000 penduduk)
7. Prevalensi HIV pada tiap kasus TB (%)



#### Lampiran 4. Teorema yang berkaitan dengan Estimasi Matriks Varians Kovarians *Random Error*

Model regresi berikut:  $y_t = f(x_t) + \varepsilon_t$ ;  $t = 1, 2, \dots, T$ .

Jika diketahui  $\varepsilon_t$  adalah *random error* pengamatan ke- $t$  diasumsikan berdistribusi normal  $T$ -variat, dengan *mean*  $E(\varepsilon) = 0$  (vektor berukuran  $T$ ) dan matriks varians-kovarians  $\text{Var}(\varepsilon) = \Sigma$  (matriks berukuran  $T \times T$ ), maka fungsi likelihood dapat disajikan sebagai berikut.

$$L(\tilde{f}, \Sigma | \tilde{y}) = \prod_{t=1}^T \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{T/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t)^T \Sigma^{-1} (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t) \right) \right\} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{TT/2} |\Sigma|^{T/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t)^T \Sigma^{-1} (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t) \right)$$

Johnson & Wichern (1982) memaparkan jika  $A$  berukuran  $k \times k$  adalah matriks simetri dan  $x$  adalah vektor berukuran  $k$ , berlaku:

$$(a) \tilde{x}^T A \tilde{x} = \text{tr}(\tilde{x}^T A \tilde{x}) = \text{tr}(A \tilde{x} \tilde{x}^T)$$

$$(b) \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^k \lambda_i, \text{ dengan } \lambda_i \text{ adalah nilai eigen dari } A.$$

Dari penjelasan di atas, maka suku  $(\tilde{y}_t - \tilde{f}_t)^T \Sigma^{-1} (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t)$  pada  $L(\tilde{f}, \Sigma | \tilde{y}_k)$  dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$(\tilde{y}_t - \tilde{f}_t)^T \Sigma^{-1} (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t) = \text{tr} \left[ (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t)^T \Sigma^{-1} (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t) \right]$$

$$= \text{tr} \left[ \Sigma^{-1} (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t) (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t)^T \right]$$

$$\sum_{t=1}^T (\tilde{y}_k - \tilde{f}_k)^T \Sigma^{-1} (\tilde{y}_k - \tilde{f}_k) = \sum_{t=1}^T \text{tr} \left[ \Sigma^{-1} (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t) (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t)^T \right] \quad (2)$$

$$= \text{tr} \left[ \Sigma^{-1} \sum_{t=1}^T (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t) (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t)^T \right]$$

Sehingga persamaan (1) disubstitusi menggunakan persamaan (2) diperoleh sebagai berikut:

$$L(\tilde{f}, \Sigma | \tilde{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{TT/2} |\Sigma|^{T/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Sigma^{-1} \sum_{t=1}^T (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t) (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t)^T \right] \right) \quad (3)$$

Dalam bentuk logaritma natural menjadi:

$$\ln [L(\tilde{f}, \Sigma | \tilde{y})] = -\frac{TT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Sigma^{-1} \sum_{t=1}^T (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t) (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t)^T \right] \quad (4)$$

Misalkan  $\mathbf{W} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t) (\tilde{y}_t - \tilde{f}_t)^T$ , maka persamaan (4) di atas menjadi:

$$\ln [L(\tilde{f}, \Sigma | \tilde{y})] = -\frac{TT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln |\Sigma| - \frac{T}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} \mathbf{W}] \quad (5)$$



#### Lampiran 4. (Lanjutan)

Estimator untuk matriks varians-kovarians  $\hat{\Sigma}$  didapatkan dengan memaksimumkan fungsi  $\ln[L(f_t, \Sigma | y_t)]$  pada persamaan (5), dengan cara  $\frac{\partial \ln[L(f_t, \Sigma | y_t)]}{\partial \Sigma} = 0$ .

$$\frac{\partial \ln[L(f_t, \Sigma | y_t)]}{\partial \Sigma} = \frac{\partial \left[ -\frac{TT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln|\Sigma| - \frac{T}{2} \text{tr}[\Sigma^{-1}W] \right]}{\partial \Sigma}$$

$$= -\frac{T}{2} \Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1} + \frac{T}{2} \Sigma^{-1} W \Sigma^{-1}$$

$$= -\frac{T}{2} \Sigma^{-1} (\Sigma - W) \Sigma^{-1}$$

$$\frac{\partial \ln[L(f_t, \Sigma | y_t)]}{\partial \Sigma} = 0$$

$$-\frac{T}{2} \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\Sigma} - W) \hat{\Sigma}^{-1} = 0$$

$$\hat{\Sigma} = W$$

Dengan demikian, estimator matriks varians-kovarians *error*  $\Sigma$  untuk model regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal disajikan sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma} = W = \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{f}_t)(y_t - \hat{f}_t)^T}{T} \quad (6)$$



**Lampiran 5.1. Data Riil Aplikasi Penderita TB Paru**

Subyek ( <i>i</i> )	Waktu ( <i>t</i> )	Respon		Prediktor		
		$y_1$	$y_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	1	0,358	0,707	0	23,51	42
	2	0,868	0,556	2	23,96	32
	3	0,513	0,643	4	24,48	25
	4	0,455	0,579	6	24,75	16
	5	0,784	0,699	8	25,34	19
	6	0,509	0,673	10	25,50	13
	7	1,035	0,836	12	25,69	15
	8	0,780	0,579	14	25,94	9
	9	1,002	0,868	16	26,45	7
	10	0,452	0,481	18	26,66	8
	11	1,202	0,940	20	26,81	6
	12	0,425	0,417	22	26,97	4
	13	0,613	0,932	24	27,18	3
2	1	0,728	0,958	0	21,67	40
	2	0,980	0,970	2	21,85	35
	3	0,895	0,726	4	22,16	29
	4	0,745	0,657	6	22,31	25
	5	0,540	0,642	8	22,67	20
	6	0,748	0,703	10	22,62	19
	7	0,725	0,390	12	22,57	18
	8	0,938	0,885	14	22,50	17
	9	0,514	0,566	16	22,41	15
	10	0,995	0,978	18	22,55	14
	11	0,453	0,385	20	22,65	13
	12	0,955	0,923	22	22,88	12
	13	0,745	0,662	24	23,14	10
3	1	0,326	0,821	0	21,37	40
	2	1,115	1,161	2	21,50	36
	3	0,491	0,321	4	21,75	31
	4	1,054	1,087	6	21,89	27
	5	0,716	0,584	8	22,19	20
	6	0,831	1,077	10	22,19	20
	7	0,616	0,747	12	22,19	19
	8	0,541	0,982	14	22,19	19
	9	0,810	0,470	16	22,19	18
	10	0,882	1,224	18	22,36	15
	11	1,004	1,270	20	22,53	13
	12	1,047	1,087	22	22,72	12
	13	0,692	0,331	24	23,09	10



### Lampiran 5.1. (Lanjutan)

Subyek ( <i>i</i> )	Waktu ( <i>t</i> )	Respon		Prediktor		
		$y_1$	$y_2$	$x_1$	$x_2$	$X_3$
4	1	0,619	0,906	0	16,44	122
	2	0,859	0,762	2	16,59	119
	3	0,503	0,611	4	16,73	115
	4	0,854	1,128	6	17,04	109
	5	0,807	0,817	8	17,33	100
	6	0,874	1,030	10	17,60	96
	7	0,626	0,627	12	17,90	91
	8	0,994	1,231	14	18,13	86
	9	0,777	0,438	16	18,67	80
	10	0,889	1,114	18	19,02	75
	11	0,881	1,172	20	19,41	69
	12	0,796	0,667	22	19,74	59
	13	0,892	1,209	24	20,00	52



## Lampiran 5.2. Syntax Program R Aplikasi Data Penderita TB Paru

```

n=13
r=4
kr=k*r
x11<-c(0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24)
x12<-c(0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24)
x13<-c(0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24)
x14<-c(0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24)
x21<-c(23.51,23.96,24.48,24.75,25.34,25.50,25.69,25.94,26.45,26.66,26.81,26.97,27.18)
x22<-c(21.67,21.85,22.16,22.31,22.67,22.62,22.57,22.50,22.41,22.55,22.65,22.88,23.14)
x23<-c(21.37,21.50,21.75,21.89,22.19,22.19,22.19,22.19,22.19,22.36,22.53,22.72,23.09)
x24<-c(16.44,16.59,16.73,17.04,17.33,17.60,17.90,18.13,18.67,19.02,19.41,19.74,20.00)
x31<-c(42,32,25,16,19,13,15,9,7,8,6,4,3)
x32<-c(40,35,29,25,20,19,18,17,15,14,13,12,10)
x33<-c(40,36,31,27,20,20,19,19,18,15,13,12,10)
x34<-c(122,119,115,109,100,96,91,86,80,75,69,59,52)
y11<-c(0.358,0.868,0.513,0.455,0.784,0.509,1.035,0.78,1.002,0.452,1.202,0.425,0.613)
y12<-c(0.728,0.98,0.895,0.745,0.54,0.748,0.725,0.938,0.514,0.995,0.453,0.955,0.745)
y13<-c(0.326,1.115,0.491,1.054,0.716,0.831,0.616,0.541,0.81,0.882,1.004,1.047,0.692)
y14<-c(0.619,0.859,0.503,0.854,0.807,0.874,0.626,0.994,0.777,0.889,0.881,0.796,0.892)
y21<-c(0.707,0.556,0.643,0.579,0.699,0.673,0.836,0.579,0.868,0.481,0.94,0.417,0.932)
y22<-c(0.958,0.97,0.726,0.657,0.642,0.703,0.39,0.885,0.566,0.978,0.385,0.923,0.662)
y23<-c(0.821,1.161,0.321,1.087,0.584,1.077,0.747,0.982,0.47,1.224,1.27,1.087,0.331)
y24<-c(0.906,0.762,0.611,1.128,0.817,1.03,0.627,1.231,0.438,1.114,1.172,0.667,1.209)
x1v=rbind(x11,x12,x13,x14)
x2v=rbind(x21,x22,x23,x24)
x3v=rbind(x31,x32,x33,x34)
y1v=rbind(y11,y12,y13,y14)
y2v=rbind(y21,y22,y23,y24)
yv=rbind(y1v,y2v)
x1=c(x1v[1,],x1v[2,],x1v[3,],x1v[4,],x1v[1,],x1v[2,],x1v[3,],x1v[4,])
x2=c(x2v[1,],x2v[2,],x2v[3,],x2v[4,],x2v[1,],x2v[2,],x2v[3,],x2v[4,])
x3=c(x3v[1,],x3v[2,],x3v[3,],x3v[4,],x3v[1,],x3v[2,],x3v[3,],x3v[4,])
y=c(y1v[1,],y1v[2,],y1v[3,],y1v[4,],y2v[1,],y2v[2,],y2v[3,],y2v[4,])

# Linearity Assumption
resettest(y11~1+x11+x21+x31,power=3,type="fitted")
resettest(y12~1+x12+x22+x32,power=3,type="fitted")
resettest(y13~1+x13+x23+x33,power=3,type="fitted")
resettest(y14~1+x14+x24+x34,power=3,type="fitted")
resettest(y21~1+x11+x21+x31,power=3,type="fitted")
resettest(y22~1+x12+x22+x32,power=3,type="fitted")
resettest(y23~1+x13+x23+x33,power=3,type="fitted")
resettest(y24~1+x14+x24+x34,power=3,type="fitted")

# Running ES
id=rep(c(1:kr),rep(n,kr))
input=list(y=data.frame(y,id),x1=data.frame(x1,id),x2=data.frame(x2,id),x3=data.frame(x3,id))

Rep.Kernel=function(dt)
{
  R=function(s,t)
  {
    integrand=function(u) {s*t-u*(s+t)+u^2}
    value=integrate(integrand,lower=0,upper=min(s,t))
    return(value$value)
  }
  nt=length(dt)
  Rt=matrix(c(rep(0,nt*nt)),nt,nt)
  for (it in 1:nt)
  {
    for (jt in 1:nt)
    {
      Rt[it,jt]=R(dt[it],dt[jt])
    }
  }
  return(Rt)
}

#####m=2
Jn=matrix(c(rep(0,kr^2)),kr,kr)
for (j in 1:kr)
  Jn[j,j]=1
In=diag(n)
B=kronecker(Jn,In)
B=ginv(B)

```



## Lampiran 5.2. (Lanjutan)

```
#Design Matrix
T1.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*2*kr)),n*kr,2*kr)
V1.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*n*kr)),n*kr,n*kr)
T2.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*2*kr)),n*kr,2*kr)
V2.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*n*kr)),n*kr,n*kr)
T3.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*2*kr)),n*kr,2*kr)
V3.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*n*kr)),n*kr,n*kr)

for (j in 1:kr)
{
I=matrix(c(rep(0,kr^2)),kr,kr)
I[j,j]=1
T1.hitung=T1.hitung+kroncker(I,cbind(1,input$x1[,1][input$x1$id==j]))
T2.hitung=T2.hitung+kroncker(I,cbind(1,input$x2[,1][input$x2$id==j]))
T3.hitung=T3.hitung+kroncker(I,cbind(1,input$x3[,1][input$x3$id==j]))
T.hitung=T1.hitung+T2.hitung+T3.hitung
V1.hitung=V1.hitung+kroncker(I,Rep.Kernel(input$x1[,1][input$x1$id==j]))
V2.hitung=V2.hitung+kroncker(I,Rep.Kernel(input$x2[,1][input$x2$id==j]))
V3.hitung=V3.hitung+kroncker(I,Rep.Kernel(input$x3[,1][input$x3$id==j]))
V.hitung=V1.hitung+V2.hitung+V3.hitung
}

#Optimasi GCV
I=diag(kr*n)
diagL=NULL
GCV=function(lambda)
{
for (j in 1:kr) {diagL=c(diagL,rep(lambda[j],n))}
L=diag(diagL)
M=B%*%V.hitung+n*L
A= T.hitung%*%ginv(t(T.hitung)%*%B%*%T.hitung)%*%t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%
B+V.hitung%*%ginv(M)%*%B%*%(I-T.hitung%*%(ginv(t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%B%*%T.hitung)%
*%t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%B))
IA=I-A
GCV=((1/(kr*n))*t(y)%*t(IA)%*IA%*y)/(((1/(kr*n))*sum(diag(IA)))^2)
return(GCV)
}

awal=NULL
bawah=NULL
atas=NULL
for (j in 1:kr)
{
awal=c(awal,0)
bawah=c(bawah,0)
atas=c(atas,Inf)
}
opt.lambda=nlmnb(start=awal,GCV,control=list(trace=1,iter.max=1),lower=bawah,upper=atas)
lambda.opt=opt.lambda$par
GCV.min=GCV(lambda.opt)

# Hitung Koefisien
Lopt=NULL
for (j in 1:kr) Lopt=c(Lopt,rep(lambda.opt[j],n))
L=diag(Lopt)
M=B%*%V.hitung+n*L
d=ginv(t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%B%*%T.hitung)%*%t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%B%*%y
c=ginv(M)%*%B%*%(y-T.hitung%*%d)

#Prediksi Respon
f.duga=T.hitung%*%d+V.hitung%*%c
y.duga=f.duga
R2=(sum((y.duga-mean(y))^2))/(sum((y-mean(y))^2))
RMSE<-sqrt((sum((y-y.hat)^2)/(kr*n)))

#Hasil Koefisien
koef.d=matrix(c(rep(0,kr*2)),2,kr)
koef.c=matrix(c(rep(0,n*kr)),n,kr)
response=NULL
for (j in 1:kr) response=c(response,paste("Response ",j))
dimnames(koef.d)=list(NULL,response)
dimnames(koef.c)=list(NULL,response)

er=y-y.duga
ev=matrix(er,kr,n)
Jn=matrix(c(rep(0,kr^2)),kr,kr)
for (j in 1:kr)
```



## Lampiran 5.2. (Lanjutan)

```

Jn[j,j]<-(1/n)*(t(ev[j,])%*%ev[j,])
Jn[1,5]<-(1/n)*(t(ev[5,])%*%ev[1,])
Jn[2,6]<-(1/n)*(t(ev[6,])%*%ev[2,])
Jn[3,7]<-(1/n)*(t(ev[7,])%*%ev[3,])
Jn[4,8]<-(1/n)*(t(ev[8,])%*%ev[4,])
Jn[5,1]=Jn[1,5]
Jn[6,2]=Jn[2,6]
Jn[7,3]=Jn[3,7]
Jn[8,4]=Jn[4,8]
In=diag(n)
B=kronecker(Jn,In)
B=ginv(B)
BI=B

#Design Matrix
T1.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*2*kr)),n*kr,2*kr)
V1.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*n*kr)),n*kr,n*kr)
T2.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*2*kr)),n*kr,2*kr)
V2.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*n*kr)),n*kr,n*kr)
T3.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*2*kr)),n*kr,2*kr)
V3.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*n*kr)),n*kr,n*kr)

for (j in 1:kr)
{
I=matrix(c(rep(0,kr^2)),kr,kr)
I[j,j]=1
T1.hitung=T1.hitung+kronecker(I,cbind(1,input$x1[,1][input$x1$id==j]))
T2.hitung=T2.hitung+kronecker(I,cbind(1,input$x2[,1][input$x2$id==j]))
T3.hitung=T3.hitung+kronecker(I,cbind(1,input$x3[,1][input$x3$id==j]))
T.hitung=T1.hitung+T2.hitung+T3.hitung
V1.hitung=V1.hitung+kronecker(I,Rep.Kernel(input$x1[,1][input$x1$id==j]))
V2.hitung=V2.hitung+kronecker(I,Rep.Kernel(input$x2[,1][input$x2$id==j]))
V3.hitung=V3.hitung+kronecker(I,Rep.Kernel(input$x3[,1][input$x3$id==j]))
V.hitung=V1.hitung+V2.hitung+V3.hitung
}

#Optimasi GCV
I=diag(Kr*n)
diagL=NULL
GCV=function(lambda)
{
for (j in 1:kr) {diagL=c(diagL,rep(lambda[j],n))}
L=diag(diagL)
M=B%*%V.hitung+n*L
A= T.hitung%*%ginv(t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%B%*%T.hitung)%*%t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%
B+V.hitung%*%ginv(M)%*%B%*(I-T.hitung%*(ginv(t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%B%*
%T.hitung)%*%t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%B))
IA=I-A
GCV=((1/(kr*n))*t(y)%*%t(IA)%*%IA%*%y)/(((1/(kr*n))*sum(diag(IA)))^2)
return(GCV)
}

awal=NULL
bawah=NULL
atas=NULL
for (j in 1:kr)
{
awal=c(awal,0)
bawah=c(bawah,0)
atas=c(atas,Inf)
}
opt.lambda=nlmminb(start=awal,GCV,control=list(trace=1,iter.max=1000,rel.tol=1e-
6),lower=bawah,upper=atas)
lambda.opt=opt.lambda$par
GCV.min=GCV(lambda.opt)

# Hitung Koefisien
Lopt=NULL
for (j in 1:kr) Lopt=c(Lopt,rep(lambda.opt[j],n))
L=diag(Lopt)
M=B%*%V.hitung+n*L
d=ginv(t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%B%*%T.hitung)%*%t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%B%*%y
c=ginv(M)%*%B%*(y-T.hitung%*%d)

#Prediksi Respon
f.duga=T.hitung%*%d+V.hitung%*%c
y.duga=f.duga
R2=(sum((y.duga-mean(y))^2))/(sum((y-mean(y))^2))

```



## Lampiran 5.2. (Lanjutan)

```
RMSE<-sqrt((sum((y-y.hat)^2)/(kr*n)))

#Hasil Koefisien
koef.d=matrix(c(rep(0,kr*2)),2,kr)
koef.c=matrix(c(rep(0,n*kr)),n,kr)
response=NULL
for (j in 1:kr) response=c(response,paste("Response ",j))
dimnames(koef.d)=list(NULL,response)
dimnames(koef.c)=list(NULL,response)

for (j in 0:(kr-1))
for (k in 1:2)
{
koef.d[k,(j+1)]=d[(j*2)+k,1]
}

for (j in 0:(kr-1))
for (k in 1:n)
{
koef.c[k,(j+1)]=c[(j*2)+k,1]
}

output1=list(d=koef.d,c=koef.c,GCV=GCV.min,lambda=lambda.opt,R2=R2,RMSE=RMSE)
out1=cbind(x1,x2,x3,y,y.duga)

# Tidak Optimal
lambda.tdkopt=runif(8,0,1000)
Lopt=NULL
for (j in 1:kr) Lopt=c(Lopt,rep(lambda.tdkopt[j],n))
L=diag(Lopt)
M=B%*%V.hitung+n*L
d=ginv(t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%B%*%T.hitung)%*%t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%B%*%y
c=ginv(M)%*%B%*%(y-T.hitung)%*%d)
f.duga=T.hitung%*%d+V.hitung%*%c
y.duga=f.duga
R2=(sum((y.duga-mean(y))^2)/(sum((y-mean(y))^2)))
RMSE<-sqrt((sum((y-y.hat)^2)/(kr*n)))
GCV.min=GCV(lambda.tdkopt)
R2
lambda.tdkopt
GCV.min
RMSE
f.duga
```



### Lampiran 5.3. Output R Estimasi Parameter Aplikasi Data Penderita TB Paru Ordo Polinomial $m=2$

Sd

	Response 1	Response 2	Response 3	Response 4	Response 5
[1,]	-4.894723	-2.0960724	2.355364	0.1881119	-0.4472729
[2,]	0.155759	0.1140726	0.482588	0.1110966	-0.1895259
	Response 6	Response 7	Response 8		
[1,]	-2.04815676	5.7463469	-7.5966005		
[2,]	0.01359992	0.3033357	0.2858787		

Sc

	Response 1	Response 2	Response 3	Response 4	Response 5
[1,]	-0.1667841	-0.43612654	0.28314987	0.62040082	0.64479574
[2,]	0.4727214	0.07784650	-0.58980215	-0.46730547	-1.09425466
[3,]	-0.4361265	0.28314987	0.62040082	0.64479574	1.20893282
[4,]	0.0778465	-0.58980215	-0.46730547	-1.09425466	-0.76064159
[5,]	0.2831499	0.62040082	0.64479574	1.20893282	0.20706735
[6,]	-0.5898021	-0.46730547	-1.09425466	-0.76064159	-0.05322432
[7,]	0.6204008	0.64479574	1.20893282	0.20706735	0.11366693
[8,]	-0.4673055	-1.09425466	-0.76064159	-0.05322432	-0.08813041
[9,]	0.6447957	1.20893282	0.20706735	0.11366693	0.14382536
[10,]	-1.0942547	-0.76064159	-0.05322432	-0.08813041	-0.24617667
[11,]	1.2089328	0.20706735	0.11366693	0.14382536	0.20667356
[12,]	-0.7606416	-0.05322432	-0.08813041	-0.24617667	-0.21296351
[13,]	0.2070673	0.11366693	0.14382536	0.20667356	0.36671849
	Response 6	Response 7	Response 8		
[1,]	1.20893282	0.20706735	0.11366693		
[2,]	-0.76064159	-0.05322432	-0.08813041		
[3,]	0.20706735	0.11366693	0.14382536		
[4,]	-0.05322432	-0.08813041	-0.24617667		
[5,]	0.11366693	0.14382536	0.20667356		
[6,]	-0.08813041	-0.24617667	-0.21296351		
[7,]	0.14382536	0.20667356	0.36671849		
[8,]	-0.24617667	-0.21296351	-0.52604861		
[9,]	0.20667356	0.36671849	0.62201799		
[10,]	-0.21296351	-0.52604861	-0.60300485		
[11,]	0.36671849	0.62201799	0.39070650		
[12,]	-0.52604861	-0.60300485	-0.11406047		
[13,]	0.62201799	0.39070650	-0.27518922		

SGCV

[1,]

[1,] 0.295637

Slambda

[1] 2.128166e-01 5.213199e-01 3.574428e-01 8.329636e-01 6.988703e-01

[6] 4.677558e-02 1.549346e-01 1.145773e-09

SR2

[1] 0.7602489

SRMSE

[1] 0.05283484

### Ordo Polinomial $m=3$

Sd

	Response 1	Response 2	Response 3	Response 4	Response 5
[1,]	-5.33072899	0.01522656	0.122177577	4.13696508	-0.05810028
[2,]	0.10543127	-2.19973605	-0.001915556	0.60279280	0.59175026
[3,]	0.01522656	0.12217758	4.136965078	-0.05810028	0.16503020
	Response 6	Response 7	Response 8		
[1,]	0.16503020	-0.82135590	0.03021931		
[2,]	-0.01631864	-0.31327928	-1.94940482		
[3,]	-0.82135590	0.03021931	-0.01090642		

Sc

	Response 1	Response 2	Response 3	Response 4	Response 5
[1,]	-0.2017689	-0.52531320	0.25412102	0.69057078	0.72840869
[2,]	0.5510416	0.15602981	-0.63036683	-0.52619365	-1.23633466
[3,]	-0.5253132	0.25412102	0.69057078	0.72840869	1.36049351
[4,]	0.1560298	-0.63036683	-0.52619365	-1.23633466	-0.84444174
[5,]	0.2541210	0.69057078	0.72840869	1.36049351	0.22375356
[6,]	-0.6303668	-0.52619365	-1.23633466	-0.84444174	-0.05328455
[7,]	0.6905708	0.72840869	1.36049351	0.22375356	0.12085090
[8,]	-0.5261937	-1.23633466	-0.84444174	-0.05328455	-0.10649235
[9,]	0.7284087	1.36049351	0.22375356	0.12085090	0.17123179
[10,]	-1.2363347	-0.84444174	-0.05328455	-0.10649235	-0.27850141
[11,]	1.3604935	0.22375356	0.12085090	0.17123179	0.23678781
[12,]	-0.8444417	-0.05328455	-0.10649235	-0.27850141	-0.24687019
[13,]	0.2237536	0.12085090	0.17123179	0.23678781	0.42011118
	Response 6	Response 7	Response 8		
[1,]	1.36049351	0.22375356	0.12085090		
[2,]	-0.84444174	-0.05328455	-0.1064924		
[3,]	0.22375356	0.12085090	0.1712318		
[4,]	-0.05328455	-0.10649235	-0.2785014		
[5,]	0.12085090	0.17123179	0.2367878		
[6,]	-0.10649235	-0.27850141	-0.2468702		
[7,]	0.17123179	0.23678781	0.4201112		



### Lampiran 5.3. (Lanjutan)

```
[8,] -0.27850141 -0.24687019 -0.6050009
[9,] 0.23678781 0.42011118 0.7153267
[10,] -0.24687019 -0.60500087 -0.6880029
[11,] 0.42011118 0.71532672 0.4413444
[12,] -0.60500087 -0.68800286 -0.1275005
[13,] 0.71532672 0.44134436 -0.1772359
```

\$GCV

```
[1,] [1,]
[1,] 0.2901027
```

\$lambda

```
[1] 0.1169755 0.3549608 0.5580636 0.6996226 0.4949339 0.3101344 0.0000000
[8] 0.2934106
```

\$R2

```
[1] 0.8122085
```

\$RMSE

```
[1] 0.04413224
```

### Ordo Polinomial $m=4$

\$d

```
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] 0.0006326049 -0.015488029 0.0010643385 -0.0073771972 0.005270223
[2,] 0.0910289731 0.003852198 0.1025401170 0.0007312821 0.530968412
[3,] -0.0154880286 0.001064339 -0.0073771972 0.0052702228 0.015198400
[4,] 0.0038521980 0.102540117 0.0007312821 0.5309684121 -0.004956025
Response 6 Response 7 Response 8
[1,] 0.015198400 0.001572219 0.008234228
[2,] -0.004956025 0.124166703 -0.002054301
[3,] 0.001572219 0.008234228 -0.002344026
[4,] 0.124166703 -0.002054301 -0.265773969
```

\$c

```
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] -0.2830810 -0.65130297 0.22430527 0.78099488 0.83857685
[2,] 0.6916854 0.25480082 -0.69013946 -0.59620148 -1.43616513
[3,] -0.6513030 0.22430527 0.78099488 0.83857685 1.57043750
[4,] 0.2548008 -0.69013946 -0.59620148 -1.43616513 -0.94940308
[5,] 0.2243053 0.78099488 0.83857685 1.57043750 0.24220458
[6,] -0.6901395 -0.59620148 -1.43616513 -0.94940308 -0.08801664
[7,] 0.7809949 0.83857685 1.57043750 0.24220458 0.16193198
[8,] -0.5962015 -1.43616513 -0.94940308 -0.08801664 -0.12338188
[9,] 0.8385768 1.57043750 0.24220458 -0.16193198 0.18906066
[10,] -1.4361651 -0.94940308 -0.08801664 -0.12338188 -0.30569689
[11,] 1.5704375 0.24220458 0.16193198 0.18906066 0.28001619
[12,] -0.9494031 -0.08801664 -0.12338188 -0.30569689 -0.30841983
[13,] 0.2422046 0.16193198 0.18906066 0.28001619 0.50435391
Response 6 Response 7 Response 8
[1,] 1.57043750 0.24220458 0.1619320
[2,] -0.94940308 -0.08801664 -0.1233819
[3,] 0.24220458 0.16193198 0.1890607
[4,] -0.08801664 -0.12338188 -0.3056969
[5,] 0.16193198 0.18906066 0.2800162
[6,] -0.12338188 -0.30569689 -0.3084198
[7,] 0.18906066 0.28001619 0.5043539
[8,] -0.30569689 -0.30841983 -0.7124551
[9,] 0.28001619 0.50435391 0.8321670
[10,] -0.30841983 -0.71245509 -0.7920505
[11,] 0.50435391 0.83216705 0.5032008
[12,] -0.71245509 -0.79205045 -0.1429173
[13,] 0.83216705 0.50320078 -0.2074736
```

\$GCV

```
[1,] [1,]
[1,] 0.2630081
```

\$lambda

```
[1] 0.003881647 0.253533880 0.557717832 1.033110344 0.510331605 0.188195846
[7] 0.060838425 0.220572600
```

\$R2

```
[1] 0.8278172
```

\$RMSE

```
[1] 0.04224272
```

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=1000,rel.tol=1e-
6),lower=bawah,upper=atas)
0: 154451.50: 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
1: 0.37434140: 0.353624 0.353629 0.353631 0.353633 0.353631 0.353627 0.353625 0.353028
2: 0.34353433: 0.310962 0.355179 0.391110 0.423686 0.379152 0.347646 0.271219 0.349464
3: 0.27851468: 0.118476 0.350712 0.535324 0.718524 0.481734 0.305885 0.000000 0.322707
4: 0.27272101: 0.000000 0.318288 0.577071 0.866227 0.541250 0.220509 0.0299078 0.275024
5: 0.26579779: 0.000000 0.259103 0.599801 0.955130 0.545812 0.189052 0.0288517 0.250483
6: 0.26378948: 0.000000 0.248483 0.578781 1.00061 0.529656 0.187613 0.0463971 0.236673
7: 0.26324718: 0.00226313 0.247363 0.563262 1.01849 0.518219 0.190867 0.0566889 0.231047
8: 0.26319305: 0.00352167 0.247450 0.555673 1.02641 0.514409 0.194189 0.0617196 0.224819
```



### Lampiran 5.3. (Lanjutan)

9:	0.26317020:	0.00362586	0.251572	0.557067	1.02956	0.512327	0.191057	0.0612660	0.221711
10:	0.26316248:	0.00367500	0.253651	0.557758	1.03111	0.511301	0.189469	0.0610452	0.220170
11:	0.26311565:	0.00377752	0.254286	0.557965	1.03234	0.510538	0.188943	0.0608251	0.219507
12:	0.26306225:	0.00381024	0.253922	0.557855	1.03279	0.510411	0.188534	0.0608104	0.220049
13:	0.26303644:	0.00383126	0.253697	0.557769	1.03303	0.510334	0.188389	0.0608332	0.220302
14:	0.26302277:	0.00384647	0.253605	0.557716	1.03312	0.510307	0.188295	0.0608409	0.220449
15:	0.26301332:	0.00386344	0.253547	0.557713	1.03317	0.510296	0.188239	0.0608434	0.220509
16:	0.26301080:	0.00387198	0.253540	0.557716	1.03314	0.510312	0.188217	0.0608407	0.220545
17:	0.26300951:	0.00387622	0.253536	0.557717	1.03312	0.510322	0.188206	0.0608392	0.220562
18:	0.26300888:	0.00387801	0.253533	0.557717	1.03312	0.510329	0.188199	0.0608400	0.220569
19:	0.26300857:	0.00387885	0.253532	0.557717	1.03311	0.510332	0.188196	0.0608400	0.220574
20:	0.26300850:	0.00387963	0.253533	0.557717	1.03311	0.510332	0.188196	0.0608391	0.220574
21:	0.26300825:	0.00388079	0.253534	0.557718	1.03311	0.510332	0.188196	0.0608388	0.220573
22:	0.26300813:	0.00388137	0.253534	0.557718	1.03311	0.510332	0.188196	0.0608386	0.220573
23:	0.26300808:	0.00388163	0.253534	0.557718	1.03311	0.510331	0.188196	0.0608386	0.220572
24:	0.26300807:	0.00388162	0.253534	0.557718	1.03311	0.510332	0.188196	0.0608385	0.220573
25:	0.26300806:	0.00388165	0.253534	0.557718	1.03311	0.510332	0.188196	0.0608385	0.220573
26:	0.26300806:	0.00388165	0.253534	0.557718	1.03311	0.510332	0.188196	0.0608384	0.220573

### Ordo Polinomial $m=5$

Sd

	Response 1	Response 2	Response 3	Response 4	Response 5
[1,]	-8.332381e-06	-1.309837e-03	9.845623e-04	3.749555e-05	1.909592e-03
[2,]	-1.356341e-04	-6.123339e-03	2.750240e-06	4.243073e-04	-1.982186e-04
[3,]	-1.309837e-03	9.845623e-04	3.749555e-05	1.909592e-03	2.463338e-06
[4,]	-6.123339e-03	2.750240e-06	4.243073e-04	-1.982186e-04	3.396041e-05
[5,]	9.845623e-04	3.749555e-05	1.909592e-03	2.463338e-06	3.817119e-04
	Response 6	Response 7	Response 8		
[1,]	2.463338e-06	3.817119e-04	-5.105122e-04		
[2,]	3.396041e-05	1.699740e-03	-4.979472e-07		
[3,]	3.817119e-04	-5.105122e-04	-9.627830e-06		
[4,]	1.699740e-03	-4.979472e-07	-1.138945e-04		
[5,]	-5.105122e-04	-9.627830e-06	-5.290654e-04		

Sc

	Response 1	Response 2	Response 3	Response 4	Response 5
[1,]	-0.3577766	-0.6604165	0.18141790	0.67948816	0.67780713
[2,]	0.7849158	0.2636844	-0.62265465	-0.46329097	-1.27056906
[3,]	-0.6604165	0.1814179	0.67948816	0.67780713	1.39936208
[4,]	0.2636844	-0.6226546	-0.46329097	-1.27056906	-0.78201619
[5,]	0.1814179	0.6794882	0.67780713	1.39936208	0.16953037
[6,]	-0.6226546	-0.4632910	-1.27056906	-0.78201619	-0.12697988
[7,]	0.6794882	0.6778071	1.39936208	0.16953037	0.17186739
[8,]	-0.4632910	-1.2705691	-0.78201619	-0.12697988	-0.05355193
[9,]	0.6778071	1.3993621	0.16953037	0.17186739	0.09467037
[10,]	-1.2705691	-0.7820162	-0.12697988	-0.05355193	-0.18993805
[11,]	1.3993621	0.1695304	0.17186739	0.09467037	0.15411957
[12,]	-0.7820162	-0.1269799	-0.05355193	-0.18993805	-0.15534872
[13,]	0.1695304	0.1718674	0.09467037	0.15411957	0.29455757
	Response 6	Response 7	Response 8		
[1,]	1.39936208	0.16953037	0.17186739		
[2,]	-0.78201619	-0.12697988	-0.05355193		
[3,]	0.16953037	0.17186739	0.09467037		
[4,]	-0.12697988	-0.05355193	-0.18993805		
[5,]	0.17186739	0.09467037	0.15411957		
[6,]	-0.05355193	-0.18993805	-0.15534872		
[7,]	0.09467037	0.15411957	0.29455757		
[8,]	-0.18993805	-0.15534872	-0.43491957		
[9,]	0.15411957	0.29455757	0.51756273		
[10,]	-0.15534872	-0.43491957	-0.50314650		
[11,]	0.29455757	0.51756273	0.32131992		
[12,]	-0.43491957	-0.50314650	-0.09197074		
[13,]	0.51756273	0.32131992	-0.85490063		

SGCV

[1,]  
[1,] 0.2850864

\$lambda

[1] 5.907167e-02 7.156904e-01 1.385132e-01 9.235542e-01 7.520492e-01  
[6] 1.575572e-01 2.224845e-03 1.164637e-10

\$R2

[1] 0.8191905

\$RMSE

[1] 0.04921866



**Lampiran 5.4. Analisis Deskriptif Aplikasi Data Penderita TB Paru**  
**Descriptive Statistics: x2, x3, y1, y2**

Variable	s	N	N*	Mean	StDev	Minimum	Median	Maximum
x2	1	13	0	25.634	1.187	23.510	25.690	27.180
	2	13	0	22.460	0.396	21.670	22.550	23.140
	3	13	0	22.166	0.471	21.370	22.190	23.090
	4	13	0	18.046	1.227	16.440	17.900	20.000
x3	1	13	0	15.31	11.66	3.00	13.00	42.00
	2	13	0	20.54	9.20	10.00	18.00	40.00
	3	13	0	21.54	9.31	10.00	19.00	40.00
	4	13	0	90.23	22.68	52.00	91.00	122.00
y1	1	13	0	0.6920	0.2722	0.3580	0.6130	1.2020
	2	13	0	0.7662	0.1819	0.4530	0.7450	0.9950
	3	13	0	0.7788	0.2429	0.3260	0.8100	1.1150
	4	13	0	0.7978	0.1367	0.5030	0.8540	0.9940
y2	1	13	0	0.6854	0.1677	0.4170	0.6730	0.9400
	2	13	0	0.7265	0.2066	0.3850	0.7030	0.9780
	3	13	0	0.8586	0.3378	0.3210	0.9820	1.2700
	4	13	0	0.9009	0.2654	0.4380	0.9060	1.2310



### Lampiran 5.5. Uji Korelasi Antar Tiap Subyek

#### Correlation: y11, y21

Pearson correlation of y11 and y21 = 0.614  
P-Value = 0.026

#### Correlation: y12, y22

Pearson correlation of y12 and y22 = 0.773  
P-Value = 0.002

#### Correlation: y13, y23

Pearson correlation of y13 and y23 = 0.588  
P-Value = 0.035

#### Correlation: y14, y24

Pearson correlation of y14 and y24 = 0.668  
P-Value = 0.013

#### Correlation: y1, y2

Pearson correlation of y1 and y2 = 0.605  
P-Value = 0.000



## Lampiran 5.6. Uji Autokorelasi Aplikasi Data Penderita TB Paru

### Autocorrelations

Series: y11

Lag	Autocorrelation	Std. Error <sup>a</sup>	Bo
			Value
1	-.389	.248	2.457
2	.399	.238	5.272
3	-.353	.226	7.905

a. The underlying process assumed is independent

b. Based on the asymptotic chi-square approximation

### Autocorrelations

Series: y21

Lag	Autocorrelation	Std. Error <sup>a</sup>	Bo
			Value
1	-.558	.248	5.053
2	.369	.238	7.471
3	-.523	.226	12.804

a. The underlying process assumed is independent

b. Based on the asymptotic chi-square approximation

### Autocorrelations

Series: y12

Lag	Autocorrelation	Std. Error <sup>a</sup>	Bo
			Value
1	-.428	.248	2.979
2	.373	.238	5.445
3	-.289	.226	7.079

a. The underlying process assumed is independent

b. Based on the asymptotic chi-square approximation

### Autocorrelations

Series: y22

Lag	Autocorrelation	Std. Error <sup>a</sup>	Bo
			Value
1	-.326	.248	1.723
2	.347	.238	3.862
3	-.506	.226	8.846

a. The underlying process assumed is independent

b. Based on the asymptotic chi-square approximation

### Autocorrelations

Series: y13

Lag	Autocorrelation	Std. Error <sup>a</sup>	Bo
			Value
1	.378	.248	2.322
2	.350	.238	4.494

### Autocorrelations

Series: y23

Lag	Autocorrelation	Std. Error <sup>a</sup>	Bo
			Value
1	-.349	.248	1.977
2	-.302	.238	3.598



### Lampiran 5.7. Uji Linieritas Data Penderita TB Paru

```
> resettest(y11~1+x11+x21+x31,power=2,type="fitted")
```

RESET test

data: y11 ~ 1 + x11 + x21 + x31  
RESET = 5.3177, df1 = 2, df2 = 7, p-value = 0.0394

```
> resettest(y21~1+x11+x21+x31,power=2,type="fitted")
```

RESET test

data: y21 ~ 1 + x11 + x21 + x31  
RESET = 0.5320, df1 = 2, df2 = 7, p-value = 0.6094

```
> resettest(y12~1+x12+x22+x32,power=2,type="fitted")
```

RESET test

data: y12 ~ 1 + x12 + x22 + x32  
RESET = 3.1459, df1 = 2, df2 = 7, p-value = 0.1060

```
> resettest(y22~1+x12+x22+x32,power=2,type="fitted")
```

RESET test

data: y22 ~ 1 + x12 + x22 + x32  
RESET = 5.5842, df1 = 2, df2 = 7, p-value = 0.0355

```
> resettest(y13~1+x13+x23+x33,power=2,type="fitted")
```

RESET test

data: y13 ~ 1 + x13 + x23 + x33  
RESET = 5.0163, df1 = 2, df2 = 7, p-value = 0.0445

```
> resettest(y23~1+x13+x23+x33,power=2,type="fitted")
```

RESET test

data: y23 ~ 1 + x13 + x23 + x33  
RESET = 4.9784, df1 = 2, df2 = 7, p-value = 0.0452

```
> resettest(y14~1+x14+x24+x34,power=2,type="fitted")
```

RESET test

data: y14 ~ 1 + x14 + x24 + x34  
RESET = 6.4187, df1 = 2, df2 = 7, p-value = 0.0261

```
> resettest(y24~1+x14+x24+x34,power=2,type="fitted")
```

RESET test

data: y24 ~ 1 + x14 + x24 + x34  
RESET = 0.9805, df1 = 2, df2 = 7, p-value = 0.4213



### Lampiran 5.8. Model Spline Dengan Bobot Tidak Mempertimbangkan Korelasi

```
$d
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] -4.37404123 0.01091643 0.102138614 1.96676945 -0.03436581
[2,] 0.09596787 -1.16401009 -0.002851391 -0.36474781 -0.10423335
[3,] 0.01091643 0.10213861 1.966769450 -0.03436581 0.01769952
Response 6 Response 7 Response 8
[1,] 0.0176995178 0.007723729 0.008048789
[2,] -0.0008528146 -0.093266326 0.257714954
[3,] 0.0077237290 0.008048789 -0.055032701
```

```
$c
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] -0.15558493 -0.35086209 0.222207061 0.480488924 0.469421328
[2,] 0.40996320 0.05370283 -0.467203835 -0.325648291 -0.866527349
[3,] -0.35086209 0.22220706 0.480488924 0.469421328 0.977362119
[4,] 0.05370283 -0.46720383 -0.325648291 -0.866527349 -0.606673817
[5,] 0.22220706 0.48048892 0.469421328 0.977362119 0.159354855
[6,] -0.46720383 -0.32564829 -0.866527349 -0.606673817 -0.034616544
[7,] 0.48048892 0.46942133 0.977362119 0.159354855 0.059190680
[8,] -0.32564829 -0.86652735 -0.606673817 -0.034616544 -0.009897037
[9,] 0.46942133 0.97736212 0.159354855 0.059190680 0.031714166
[10,] -0.86652735 -0.60667382 -0.034616544 -0.009897037 -0.103003203
[11,] 0.97736212 0.15935485 0.059190680 0.031714166 0.071307249
[12,] -0.60667382 -0.03461654 -0.009897037 -0.103003203 -0.064298751
[13,] 0.15935485 0.05919068 0.031714166 0.071307249 0.151557379
Response 6 Response 7 Response 8
[1,] 0.977362119 0.159354855 0.059190680
[2,] -0.606673817 -0.034616544 -0.009897037
[3,] 0.159354855 0.059190680 0.031714166
[4,] -0.034616544 -0.009897037 -0.103003203
[5,] 0.059190680 0.031714166 0.071307249
[6,] -0.009897037 -0.103003203 -0.064298751
[7,] 0.031714166 0.071307249 0.151557379
[8,] -0.103003203 -0.064298751 -0.227255170
[9,] 0.071307249 0.151557379 0.266558813
[10,] -0.064298751 -0.227255170 -0.266248633
[11,] 0.151557379 0.266558813 0.175036752
[12,] -0.227255170 -0.266248633 -0.050045701
[13,] 0.266558813 0.175036752 -0.079021054
```

```
$GCV
[1,] 0.1053527
```

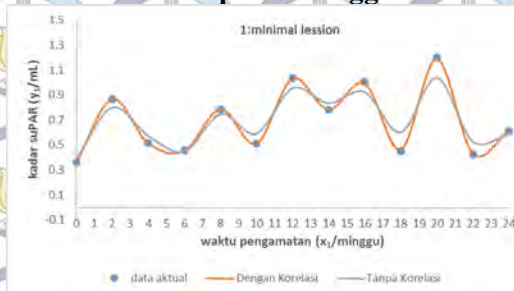
```
$lambda
[1] 0.4897543 2.0836570 3.2327636 1801.4790073 42.6315677
[6] 13.1871315 0.4643812 41.5969177
```

```
$R2
[1] 0.5010813
```

```
$RMSE
[1] 0.1217274
```



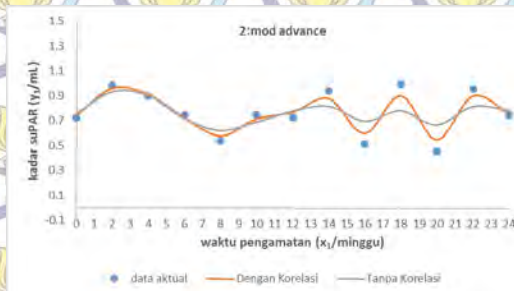
**Lampiran 5.9. Perbandingan Hasil Estimasi pada Model Regresi Nonparametrik Spline Menggunakan Bobot dengan dan tanpa korelasi**



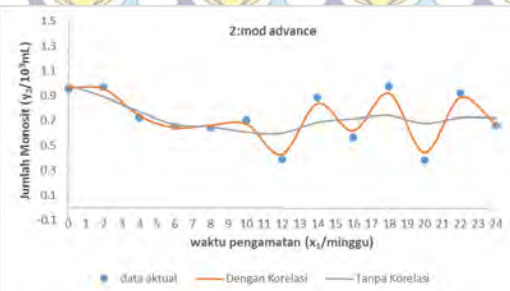
(a)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *Minimal Lesson*



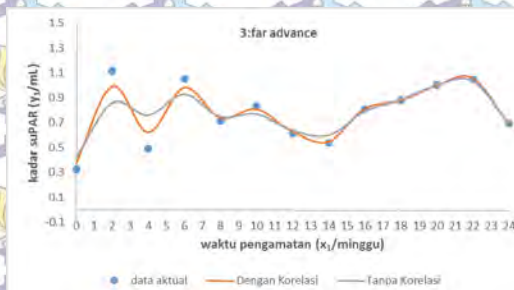
(b)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *Minimal Lesson*



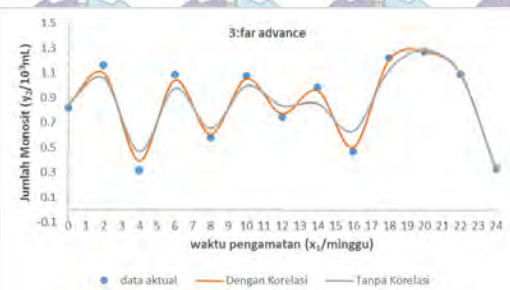
(c)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *Mod Advance*



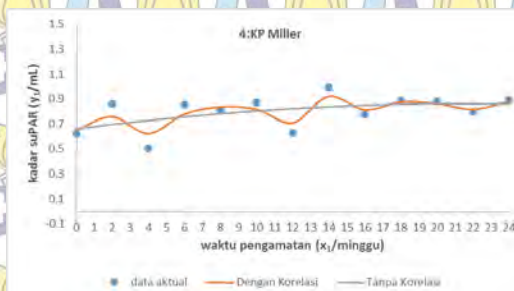
(d)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *Mod Advance*



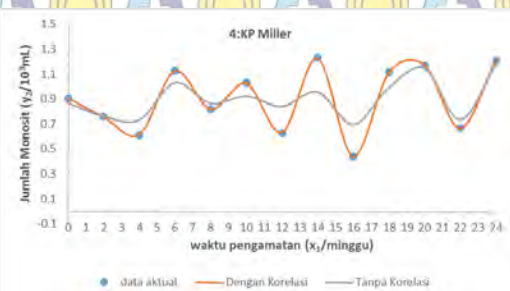
(e)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *Far Advance*



(f)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *Far Advance*



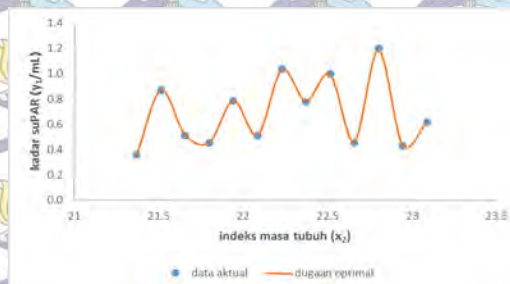
(g)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *KP Miller*



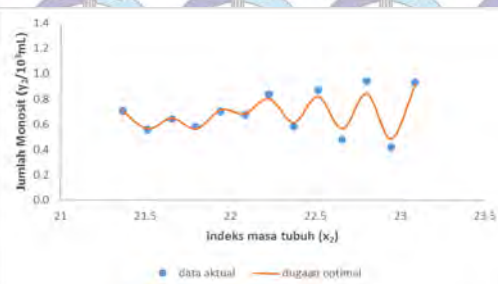
(h)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *KP Miller*



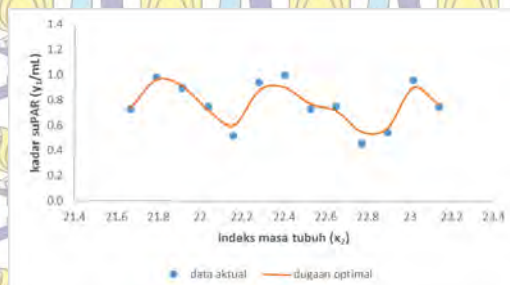
**Lampiran 5.10. Estimator *Spline*  $x_2$  terhadap  $y_1$  dan  $y_2$  pada Data TB Paru**



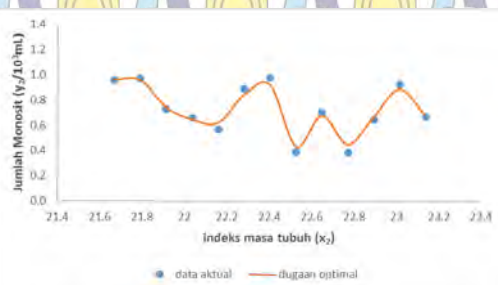
(a)  $x_2$  dan  $y_1$  subyek *Minimal Lesson*



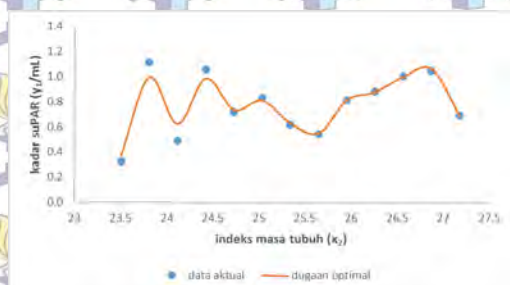
(b)  $x_2$  dan  $y_2$  subyek *Minimal Lesson*



(c)  $x_2$  dan  $y_1$  subyek *Mod Advance*



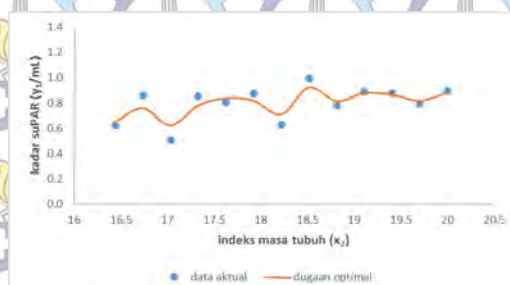
(d)  $x_2$  dan  $y_2$  subyek *Mod Advance*



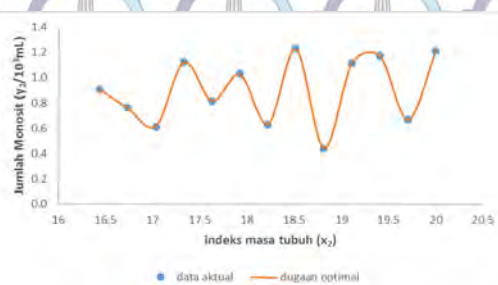
(e)  $x_2$  dan  $y_1$  subyek *Far Advance*



(f)  $x_2$  dan  $y_2$  subyek *Far Advance*



(g)  $x_2$  dan  $y_1$  subyek *KP Miller*



(h)  $x_2$  dan  $y_2$  subyek *KP Miller*



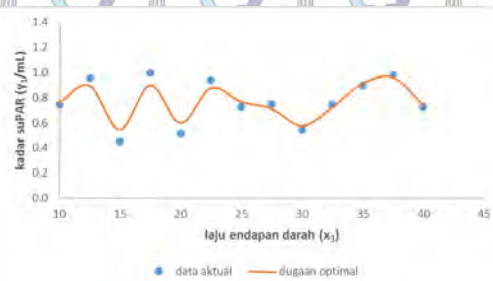
**Lampiran 5.11: Estimator *Spline*  $x_3$  terhadap  $y_1$  dan  $y_2$  pada Data TB Paru**



(a)  $x_3$  dan  $y_1$  subyek *Minimal Lesion*



(b)  $x_3$  dan  $y_2$  subyek *Minimal Lesion*



(c)  $x_3$  dan  $y_1$  subyek *Mod Advance*



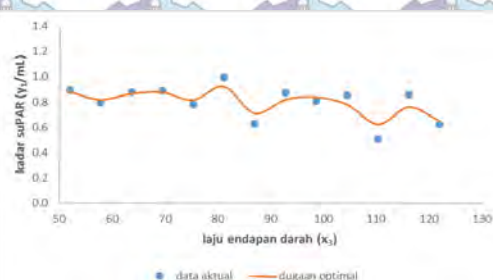
(d)  $x_3$  dan  $y_2$  subyek *Mod Advance*



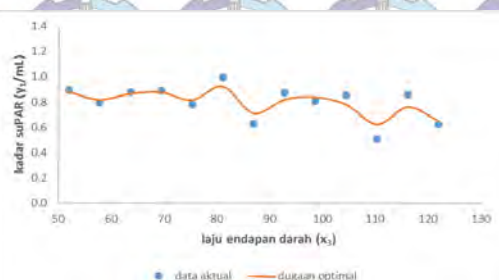
(e)  $x_3$  dan  $y_1$  subyek *Far Advance*



(f)  $x_3$  dan  $y_2$  subyek *Far Advance*



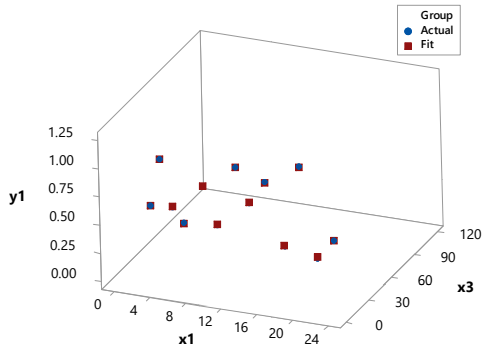
(g)  $x_3$  dan  $y_1$  subyek *KP Miller*



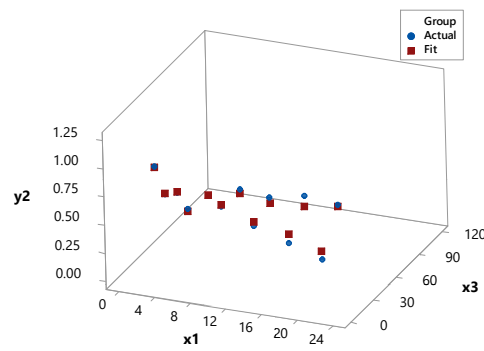
(h)  $x_3$  dan  $y_2$  subyek *KP Miller*



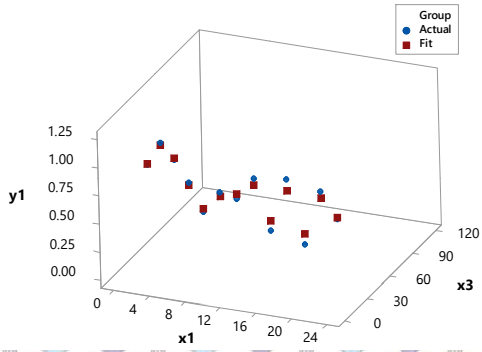
**Lampiran 5.12: Estimator *Spline*  $x_1$  dan  $x_3$  terhadap  $y_1$  dan  $y_2$  pada Data TB Paru**



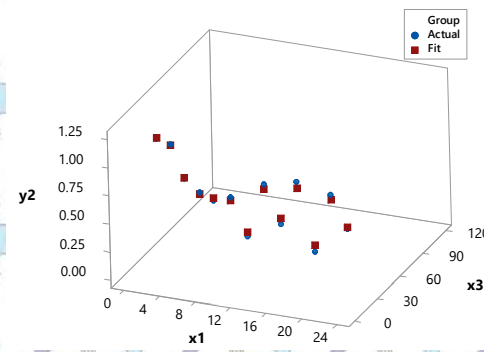
(a)  $x_1$ ,  $x_3$ , dan  $y_1$  subyek *Minimal Lesson*



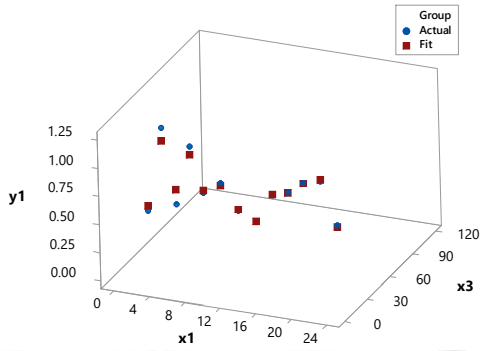
(b)  $x_1$ ,  $x_3$ , dan  $y_2$  subyek *Minimal Lesson*



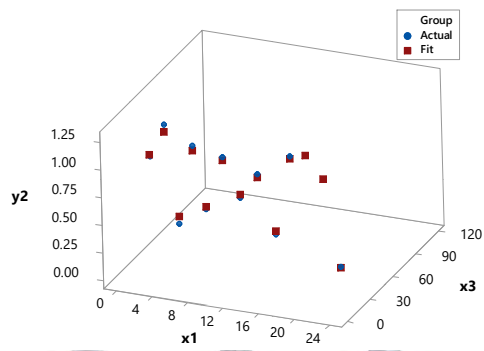
(c)  $x_1$ ,  $x_3$ , dan  $y_1$  subyek *Mod Advance*



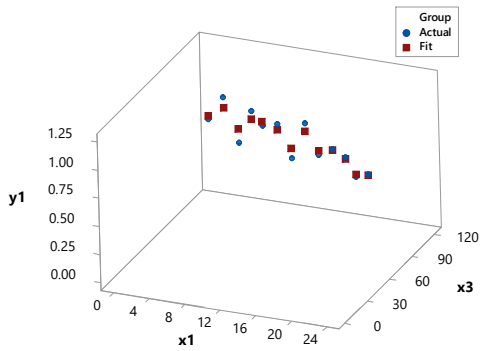
(d)  $x_1$ ,  $x_3$ , dan  $y_2$  subyek *Mod Advance*



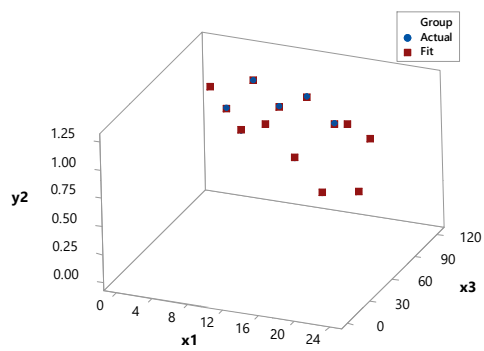
(e)  $x_1$ ,  $x_3$ , dan  $y_1$  subyek *Far Advance*



(f)  $x_1$ ,  $x_3$ , dan  $y_2$  subyek *Far Advance*



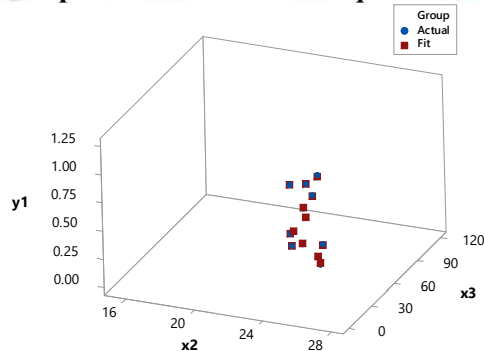
(g)  $x_1$ ,  $x_3$ , dan  $y_1$  subyek *KP Miller*



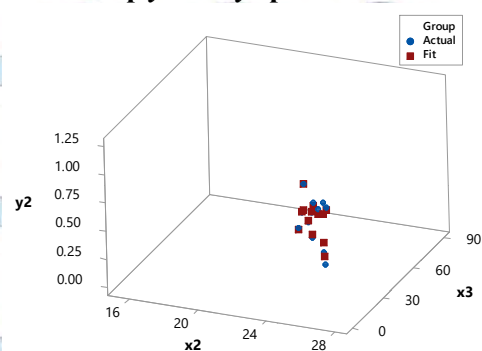
(h)  $x_1$ ,  $x_3$ , dan  $y_2$  subyek *KP Miller*



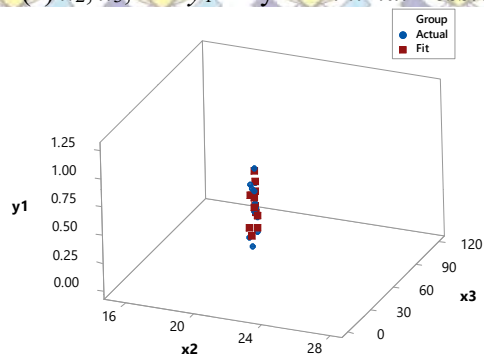
Lampiran 5.13: Estimator *Spline*  $x_2$  dan  $x_3$  terhadap  $y_1$  dan  $y_2$  pada Data TB Paru



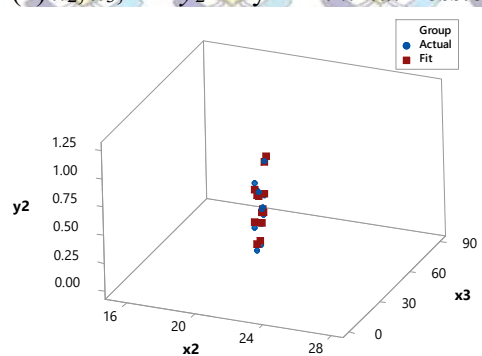
(a)  $x_2$ ,  $x_3$ , dan  $y_1$  subyek *Minimal Lesson*



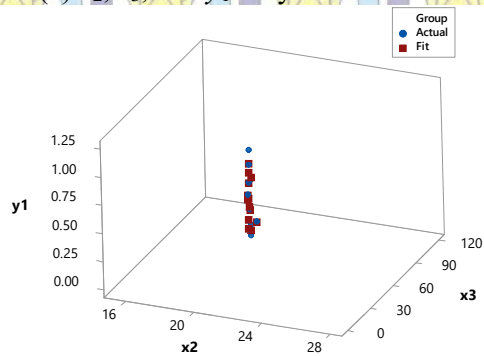
(b)  $x_2$ ,  $x_3$ , dan  $y_2$  subyek *Minimal Lesson*



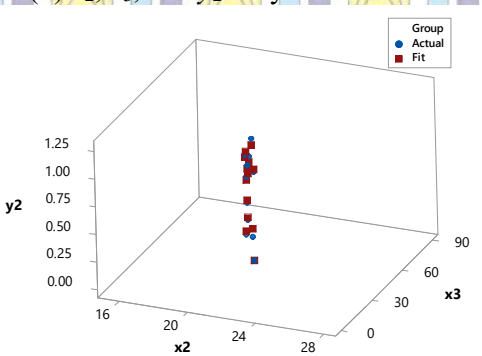
(c)  $x_2$ ,  $x_3$ , dan  $y_1$  subyek *Mod Advance*



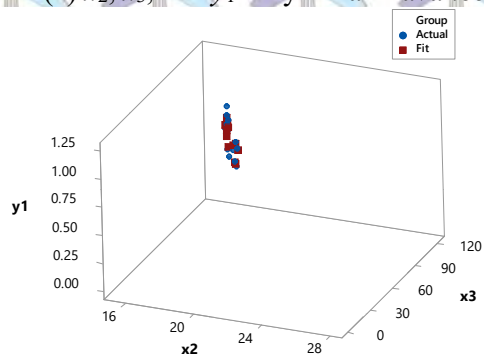
(d)  $x_2$ ,  $x_3$ , dan  $y_2$  subyek *Mod Advance*



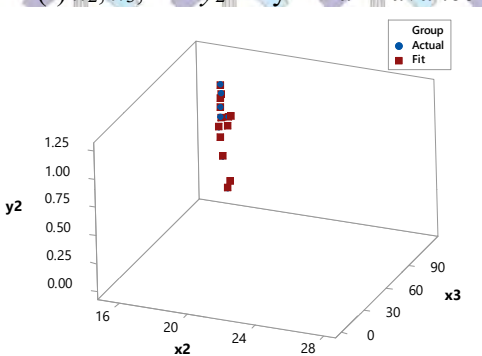
(e)  $x_2$ ,  $x_3$ , dan  $y_1$  subyek *Far Advance*



(f)  $x_2$ ,  $x_3$ , dan  $y_2$  subyek *Far Advance*



(g)  $x_2$ ,  $x_3$ , dan  $y_1$  subyek *KP Miller*



(h)  $x_2$ ,  $x_3$ , dan  $y_2$  subyek *KP Miller*



#### Lampiran 5.14: Model Akhir Pada Aplikasi Penderita TB Paru

Model Regresi Nonparametrik, untuk  $p = 1, q = 2, N = 4, T = 13, m = 4$  sebagai berikut:

$$\tilde{f} = \mathbf{T}\tilde{d} + \mathbf{V}\tilde{c},$$

$\mathbf{T}$  adalah matriks berorde  $(2NT) \times (2Nm)$  atau  $104 \times 32$

$\tilde{d}$  adalah vektor berorde  $2Nm$  atau 32

$\mathbf{V}$  adalah matriks berorde  $(2NT) \times (2NT)$  atau  $104 \times 104$

$\tilde{c}$  adalah vektor berorde  $2NT$  atau 104

Hasil perhitungan  $\mathbf{T}\tilde{d}$  menghasilkan vektor berorde  $2NT$  atau 104

Hasil perhitungan  $\mathbf{V}\tilde{c}$  menghasilkan vektor berorde  $2NT$  atau 104

Dengan demikian  $\tilde{f}$  menghasilkan vektor berorde  $2NT$  atau 104

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{24} \end{pmatrix}$$

Serta

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{24} \end{pmatrix}$$

Untuk lebih memudahkan proses perhitungan, disajikan dalam bentuk

$$\tilde{f}_{ki} = \mathbf{T}_{ki} \tilde{d}_{ki} + \mathbf{V}_{ki} \tilde{c}_{ki}$$



#### Lampiran 5.14. (Lanjutan)

Matriks  $\mathbf{T}_{ki}$ ,  $\mathbf{d}_{ki}$ , serta  $\mathbf{T}_{ki} \mathbf{d}_{ki}$  dapat disajikan sebagai berikut:

$$\mathbf{T}_{ki} = \begin{bmatrix} \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki2} \rangle & \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki3} \rangle & \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki4} \rangle \\ \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki2} \rangle & \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki3} \rangle & \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki4} \rangle \\ \langle \eta_{ki3}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki3}, \phi_{ki2} \rangle & \langle \eta_{ki3}, \phi_{ki3} \rangle & \langle \eta_{ki3}, \phi_{ki4} \rangle \\ \langle \eta_{ki4}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki4}, \phi_{ki2} \rangle & \langle \eta_{ki4}, \phi_{ki3} \rangle & \langle \eta_{ki4}, \phi_{ki4} \rangle \\ \langle \eta_{ki5}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki5}, \phi_{ki2} \rangle & \langle \eta_{ki5}, \phi_{ki3} \rangle & \langle \eta_{ki5}, \phi_{ki4} \rangle \\ \langle \eta_{ki6}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki6}, \phi_{ki2} \rangle & \langle \eta_{ki6}, \phi_{ki3} \rangle & \langle \eta_{ki6}, \phi_{ki4} \rangle \\ \langle \eta_{ki7}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki7}, \phi_{ki2} \rangle & \langle \eta_{ki7}, \phi_{ki3} \rangle & \langle \eta_{ki7}, \phi_{ki4} \rangle \\ \langle \eta_{ki8}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki8}, \phi_{ki2} \rangle & \langle \eta_{ki8}, \phi_{ki3} \rangle & \langle \eta_{ki8}, \phi_{ki4} \rangle \\ \langle \eta_{ki9}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki9}, \phi_{ki2} \rangle & \langle \eta_{ki9}, \phi_{ki3} \rangle & \langle \eta_{ki9}, \phi_{ki4} \rangle \\ \langle \eta_{ki10}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki10}, \phi_{ki2} \rangle & \langle \eta_{ki10}, \phi_{ki3} \rangle & \langle \eta_{ki10}, \phi_{ki4} \rangle \\ \langle \eta_{ki11}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki11}, \phi_{ki2} \rangle & \langle \eta_{ki11}, \phi_{ki3} \rangle & \langle \eta_{ki11}, \phi_{ki4} \rangle \\ \langle \eta_{ki12}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki12}, \phi_{ki2} \rangle & \langle \eta_{ki12}, \phi_{ki3} \rangle & \langle \eta_{ki12}, \phi_{ki4} \rangle \\ \langle \eta_{ki13}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki13}, \phi_{ki2} \rangle & \langle \eta_{ki13}, \phi_{ki3} \rangle & \langle \eta_{ki13}, \phi_{ki4} \rangle \end{bmatrix}$$

Dimana  $\langle \eta_{kit}, \phi_{kij} \rangle = \mathcal{L}_{xit} \phi_{kij} = \frac{x_{it}^{j-1}}{(j-1)!}$ , dengan  $t = 1, 2, 3, \dots, 13; j = 1, 2, 3, 4$

$$\mathbf{T}_{ki} = \begin{bmatrix} 1 & x_{i1} & \frac{1}{2} x_{i1}^2 & \frac{1}{6} x_{i1}^3 \\ 1 & x_{i2} & \frac{1}{2} x_{i2}^2 & \frac{1}{6} x_{i2}^3 \\ 1 & x_{i3} & \frac{1}{2} x_{i3}^2 & \frac{1}{6} x_{i3}^3 \\ 1 & x_{i4} & \frac{1}{2} x_{i4}^2 & \frac{1}{6} x_{i4}^3 \\ 1 & x_{i5} & \frac{1}{2} x_{i5}^2 & \frac{1}{6} x_{i5}^3 \\ 1 & x_{i6} & \frac{1}{2} x_{i6}^2 & \frac{1}{6} x_{i6}^3 \\ 1 & x_{i7} & \frac{1}{2} x_{i7}^2 & \frac{1}{6} x_{i7}^3 \\ 1 & x_{i8} & \frac{1}{2} x_{i8}^2 & \frac{1}{6} x_{i8}^3 \\ 1 & x_{i9} & \frac{1}{2} x_{i9}^2 & \frac{1}{6} x_{i9}^3 \\ 1 & x_{i10} & \frac{1}{2} x_{i10}^2 & \frac{1}{6} x_{i10}^3 \\ 1 & x_{i11} & \frac{1}{2} x_{i11}^2 & \frac{1}{6} x_{i11}^3 \\ 1 & x_{i12} & \frac{1}{2} x_{i12}^2 & \frac{1}{6} x_{i12}^3 \\ 1 & x_{i13} & \frac{1}{2} x_{i13}^2 & \frac{1}{6} x_{i13}^3 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_{ki} = \begin{bmatrix} d_{ki1} \\ d_{ki2} \\ d_{ki3} \\ d_{ki4} \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{ki} \mathbf{d}_{ki} = \begin{bmatrix} d_{ki1} + d_{ki2} x_{i1} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{i1}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{i1}^3 \\ d_{ki1} + d_{ki2} x_{i2} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{i2}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{i2}^3 \\ d_{ki1} + d_{ki2} x_{i3} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{i3}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{i3}^3 \\ d_{ki1} + d_{ki2} x_{i4} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{i4}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{i4}^3 \\ d_{ki1} + d_{ki2} x_{i5} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{i5}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{i5}^3 \\ d_{ki1} + d_{ki2} x_{i6} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{i6}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{i6}^3 \\ d_{ki1} + d_{ki2} x_{i7} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{i7}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{i7}^3 \\ d_{ki1} + d_{ki2} x_{i8} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{i8}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{i8}^3 \\ d_{ki1} + d_{ki2} x_{i9} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{i9}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{i9}^3 \\ d_{ki1} + d_{ki2} x_{i10} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{i10}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{i10}^3 \\ d_{ki1} + d_{ki2} x_{i11} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{i11}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{i11}^3 \\ d_{ki1} + d_{ki2} x_{i12} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{i12}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{i12}^3 \\ d_{ki1} + d_{ki2} x_{i13} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{i13}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{i13}^3 \end{bmatrix}$$

Bentuk umum  $\mathbf{T}_{ki} \mathbf{d}_{ki}$  adalah sebagai berikut:

$$d_{ki1} + d_{ki2} x_{it} + \frac{1}{2} d_{ki3} x_{it}^2 + \frac{1}{6} d_{ki4} x_{it}^3, t = 1, 2, \dots, T$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{(j-1)!} d_{kij} x_{it}^{(j-1)}, t = 1, 2, \dots, T$$



#### Lampiran 5.14. (Lanjutan)

Matriks  $\mathbf{V}_{ki}$ ,  $\xi_{ki}$ , serta  $\mathbf{V}_{ki}\xi_{ki}$  dapat disajikan sebagai berikut:

$$\mathbf{V}_{ki} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{ki1}, \xi_{ki1} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{ki2}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki2}, \xi_{ki2} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{ki3}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki3}, \xi_{ki2} \rangle & \langle \xi_{ki3}, \xi_{ki3} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{ki4}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki4}, \xi_{ki2} \rangle & \langle \xi_{ki4}, \xi_{ki3} \rangle & \langle \xi_{ki4}, \xi_{ki4} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{ki5}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki5}, \xi_{ki2} \rangle & \langle \xi_{ki5}, \xi_{ki3} \rangle & \langle \xi_{ki5}, \xi_{ki4} \rangle & \langle \xi_{ki5}, \xi_{ki5} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{ki6}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki6}, \xi_{ki2} \rangle & \langle \xi_{ki6}, \xi_{ki3} \rangle & \langle \xi_{ki6}, \xi_{ki4} \rangle & \langle \xi_{ki6}, \xi_{ki5} \rangle & \langle \xi_{ki6}, \xi_{ki6} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{ki7}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki7}, \xi_{ki2} \rangle & \langle \xi_{ki7}, \xi_{ki3} \rangle & \langle \xi_{ki7}, \xi_{ki4} \rangle & \langle \xi_{ki7}, \xi_{ki5} \rangle & \langle \xi_{ki7}, \xi_{ki6} \rangle & \langle \xi_{ki7}, \xi_{ki7} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{ki8}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki8}, \xi_{ki2} \rangle & \langle \xi_{ki8}, \xi_{ki3} \rangle & \langle \xi_{ki8}, \xi_{ki4} \rangle & \langle \xi_{ki8}, \xi_{ki5} \rangle & \langle \xi_{ki8}, \xi_{ki6} \rangle & \langle \xi_{ki8}, \xi_{ki7} \rangle & \langle \xi_{ki8}, \xi_{ki8} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{ki9}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki9}, \xi_{ki2} \rangle & \langle \xi_{ki9}, \xi_{ki3} \rangle & \langle \xi_{ki9}, \xi_{ki4} \rangle & \langle \xi_{ki9}, \xi_{ki5} \rangle & \langle \xi_{ki9}, \xi_{ki6} \rangle & \langle \xi_{ki9}, \xi_{ki7} \rangle & \langle \xi_{ki9}, \xi_{ki8} \rangle & \langle \xi_{ki9}, \xi_{ki9} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{ki10}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki10}, \xi_{ki2} \rangle & \langle \xi_{ki10}, \xi_{ki3} \rangle & \langle \xi_{ki10}, \xi_{ki4} \rangle & \langle \xi_{ki10}, \xi_{ki5} \rangle & \langle \xi_{ki10}, \xi_{ki6} \rangle & \langle \xi_{ki10}, \xi_{ki7} \rangle & \langle \xi_{ki10}, \xi_{ki8} \rangle & \langle \xi_{ki10}, \xi_{ki9} \rangle & \langle \xi_{ki10}, \xi_{ki10} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki2} \rangle & \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki3} \rangle & \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki4} \rangle & \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki5} \rangle & \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki6} \rangle & \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki7} \rangle & \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki8} \rangle & \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki9} \rangle & \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki10} \rangle & \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki11} \rangle & 0 & 0 & 0 \\ \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki2} \rangle & \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki3} \rangle & \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki4} \rangle & \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki5} \rangle & \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki6} \rangle & \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki7} \rangle & \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki8} \rangle & \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki9} \rangle & \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki10} \rangle & \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki11} \rangle & \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki12} \rangle & 0 & 0 \\ \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki2} \rangle & \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki3} \rangle & \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki4} \rangle & \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki5} \rangle & \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki6} \rangle & \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki7} \rangle & \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki8} \rangle & \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki9} \rangle & \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki10} \rangle & \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki11} \rangle & \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki12} \rangle & \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki13} \rangle \end{pmatrix},$$

$$\langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle = \mathcal{L}_{xu} \xi_{kis} = R_1(x_{kit}, x_{kis}) = \int_a^b \frac{(x_{it} - u)_+^{m-1} (x_{is} - u)_+^{m-1}}{((m-1)!)^2} du, t=1,2,3,\dots,13; s=1,2,3,\dots,13$$

Untuk  $m = 4$  (kuadratik),

$$\begin{aligned} \langle \xi_{kit}, \xi_{kis} \rangle &= \frac{1}{36} (x_{it}^3 x_{is}^3) - \frac{1}{24} (x_{it}^3 x_{is}^2 + x_{it}^2 x_{is}^3) + \frac{1}{36} (x_{it}^3 x_{is} + 3x_{it}^2 x_{is}^2 + x_{it} x_{is}^3) \\ &\quad - \frac{1}{144} (x_{it}^3 + 9x_{it}^2 x_{is} + 9x_{it} x_{is}^2 + x_{is}^3) + \frac{1}{60} (x_{it}^2 + 3x_{it} x_{is} + x_{is}^2) - \frac{1}{72} (x_{it} + x_{is}) + \frac{1}{252} \\ \langle \xi_{i11}, \xi_{i11} \rangle &= \frac{1}{36} (x_{i1}^3 x_{i1}^3) - \frac{1}{24} (x_{i1}^3 x_{i1}^2 + x_{i1}^2 x_{i1}^3) + \frac{1}{36} (x_{i1}^3 x_{i1} + 3x_{i1}^2 x_{i1}^2 + x_{i1} x_{i1}^3) \\ &\quad - \frac{1}{144} (x_{i1}^3 + 9x_{i1}^2 x_{i1} + 9x_{i1} x_{i1}^2 + x_{i1}^3) + \frac{1}{60} (x_{i1}^2 + 3x_{i1} x_{i1} + x_{i1}^2) - \frac{1}{72} (x_{i1} + x_{i1}) + \frac{1}{252} \\ \langle \xi_{i12}, \xi_{i11} \rangle &= \frac{1}{36} (x_{i2}^3 x_{i1}^3) - \frac{1}{24} (x_{i2}^3 x_{i1}^2 + x_{i2}^2 x_{i1}^3) + \frac{1}{36} (x_{i2}^3 x_{i1} + 3x_{i2}^2 x_{i1}^2 + x_{i2} x_{i1}^3) \\ &\quad - \frac{1}{144} (x_{i2}^3 + 9x_{i2}^2 x_{i1} + 9x_{i2} x_{i1}^2 + x_{i1}^3) + \frac{1}{60} (x_{i2}^2 + 3x_{i2} x_{i1} + x_{i1}^2) - \frac{1}{72} (x_{i2} + x_{i1}) + \frac{1}{252} \end{aligned}$$



#### Lampiran 5.14. (Lanjutan)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_{ki1} \\ c_{ki2} \\ c_{ki3} \\ c_{ki4} \\ c_{ki5} \\ c_{ki6} \\ c_{ki7} \\ c_{ki8} \\ c_{ki9} \\ c_{ki10} \\ c_{ki11} \\ c_{ki12} \\ c_{ki13} \end{bmatrix} \mathbf{\xi}_{ki} = \begin{bmatrix} c_{ki1} \langle \xi_{ki1}, \xi_{ki1} \rangle \\ c_{ki1} \langle \xi_{ki2}, \xi_{ki1} \rangle + c_{ki2} \langle \xi_{ki2}, \xi_{ki2} \rangle \\ c_{ki1} \langle \xi_{ki3}, \xi_{ki1} \rangle + c_{ki2} \langle \xi_{ki3}, \xi_{ki2} \rangle + c_{ki3} \langle \xi_{ki3}, \xi_{ki3} \rangle \\ c_{ki1} \langle \xi_{ki4}, \xi_{ki1} \rangle + c_{ki2} \langle \xi_{ki5}, \xi_{ki2} \rangle + \dots + c_{ki4} \langle \xi_{ki4}, \xi_{ki4} \rangle \\ c_{ki1} \langle \xi_{ki5}, \xi_{ki1} \rangle + c_{ki2} \langle \xi_{ki4}, \xi_{ki2} \rangle + \dots + c_{ki5} \langle \xi_{ki5}, \xi_{ki5} \rangle \\ c_{ki1} \langle \xi_{ki6}, \xi_{ki1} \rangle + c_{ki2} \langle \xi_{ki6}, \xi_{ki2} \rangle + \dots + c_{ki6} \langle \xi_{ki6}, \xi_{ki6} \rangle \\ c_{ki1} \langle \xi_{ki7}, \xi_{ki1} \rangle + c_{ki2} \langle \xi_{ki7}, \xi_{ki2} \rangle + \dots + c_{ki7} \langle \xi_{ki7}, \xi_{ki7} \rangle \\ c_{ki1} \langle \xi_{ki8}, \xi_{ki1} \rangle + c_{ki2} \langle \xi_{ki8}, \xi_{ki2} \rangle + \dots + c_{ki8} \langle \xi_{ki8}, \xi_{ki8} \rangle \\ c_{ki1} \langle \xi_{ki9}, \xi_{ki1} \rangle + c_{ki2} \langle \xi_{ki9}, \xi_{ki2} \rangle + \dots + c_{ki9} \langle \xi_{ki9}, \xi_{ki9} \rangle \\ c_{ki1} \langle \xi_{ki10}, \xi_{ki1} \rangle + c_{ki2} \langle \xi_{ki10}, \xi_{ki2} \rangle + \dots + c_{ki10} \langle \xi_{ki10}, \xi_{ki10} \rangle \\ c_{ki1} \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki1} \rangle + c_{ki2} \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki2} \rangle + \dots + c_{ki11} \langle \xi_{ki11}, \xi_{ki11} \rangle \\ c_{ki1} \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki1} \rangle + c_{ki2} \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki2} \rangle + \dots + c_{ki12} \langle \xi_{ki12}, \xi_{ki12} \rangle \\ c_{ki1} \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki1} \rangle + c_{ki2} \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki2} \rangle + \dots + c_{ki13} \langle \xi_{ki13}, \xi_{ki13} \rangle \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bentuk umum  $\mathbf{V}_{ki} \mathbf{\xi}_{ki}$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{t-1} c_{ki(t-s)} \langle \xi_{kit}, \xi_{ki(t-s)} \rangle, t=1, 2, \dots, T \\ \begin{bmatrix} f_{ki1} \\ f_{ki2} \\ f_{ki3} \\ f_{ki4} \\ f_{ki5} \\ f_{ki6} \\ f_{ki7} \\ f_{ki8} \\ f_{ki9} \\ f_{ki10} \\ f_{ki11} \\ f_{ki12} \\ f_{ki13} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_{ki} = \mathbf{T}_{ki} \mathbf{d}_{ki} + \mathbf{V}_{ki} \mathbf{\xi}_{ki} =$$



#### Lampiran 5.14. (Lanjutan)

Bentuk umum  $\hat{f}_{ki} = \mathbf{T}_{ki} \mathbf{d}_{ki} + \mathbf{V}_{ki} \mathcal{L}_{ki}$  adalah sebagai berikut:

$$f_{kit} = d_{ki1} + d_{ki2}x_{it} + \frac{1}{2}d_{ki3}x_{it}^2 + \frac{1}{6}d_{ki4}x_{it}^3 + \sum_{s=0}^{t-1} c_{ki(t-s)} \langle \xi_{kit}, \xi_{ki(t-s)} \rangle, t=1,2,\dots,T$$

$$\langle \xi_{kit}, \xi_{ki(t-s)} \rangle = \mathcal{L}_{xit} \xi_{ki(t-s)} = R_1(x_{kit}, x_{ki(t-s)}) = \int_a^b \frac{(x_{it} - u)_+^{m-1} (x_{i(t-s)} - u)_+^{m-1}}{((m-1)!)^2} du$$

Untuk  $m = 4$  (kubik),

$$\begin{aligned} \langle \xi_{kit}, \xi_{ki(t-s)} \rangle = & \frac{1}{36}(x_{it}^3 x_{i(t-s)}^3) - \frac{1}{24}(x_{it}^3 x_{i(t-s)}^2 + x_{it}^2 x_{i(t-s)}^3) + \frac{1}{36}(x_{it}^3 x_{i(t-s)} + 3x_{it}^2 x_{i(t-s)}^2 + x_{it} x_{i(t-s)}^3) \\ & - \frac{1}{144}(x_{it}^3 + 9x_{it}^2 x_{i(t-s)} + 9x_{it} x_{i(t-s)}^2 + x_{i(t-s)}^3) + \frac{1}{60}(x_{it}^2 + 3x_{it} x_{i(t-s)} + x_{i(t-s)}^2) - \frac{1}{72}(x_{it} + x_{i(t-s)}) + \frac{1}{252} \end{aligned}$$

Dengan demikian model umum sebagai berikut:

$$f_{kit} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{(j-1)!} d_{kij} x_{it}^{(j-1)} + \sum_{s=0}^{t-1} c_{ki(t-s)} \int_a^b \frac{(x_{it} - u)_+^{m-1} (x_{i(t-s)} - u)_+^{m-1}}{((m-1)!)^2} du, t=1,2,\dots,T$$

Untuk  $m = 4$  (kuadratik)

$$\begin{aligned} f_{kit} = & d_{ki1} + d_{ki2}x_{it} + \frac{1}{2}d_{ki3}x_{it}^2 + \frac{1}{6}d_{ki4}x_{it}^3 + \sum_{s=0}^{t-1} c_{ki(t-s)} \{ \frac{1}{36}(x_{it}^3 x_{i(t-s)}^3) - \frac{1}{24}(x_{it}^3 x_{i(t-s)}^2 + x_{it}^2 x_{i(t-s)}^3) + \\ & + \frac{1}{36}(x_{it}^3 x_{i(t-s)} + 3x_{it}^2 x_{i(t-s)}^2 + x_{it} x_{i(t-s)}^3) - \frac{1}{144}(x_{it}^3 + 9x_{it}^2 x_{i(t-s)} + 9x_{it} x_{i(t-s)}^2 + x_{i(t-s)}^3) + \\ & + \frac{1}{60}(x_{it}^2 + 3x_{it} x_{i(t-s)} + x_{i(t-s)}^2) - \frac{1}{72}(x_{it} + x_{i(t-s)}) + \frac{1}{252} \} \end{aligned}$$

Untuk  $k = 1; i = 1; T = 1$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{111} = \hat{f}_{111} = & \hat{d}_{111} + \hat{d}_{112}x_{11} + \frac{1}{2}\hat{d}_{113}x_{11}^2 + \frac{1}{6}\hat{d}_{114}x_{11}^3 + \frac{1}{36}\hat{c}_{111}(x_{11}^3 x_{11}^3) - \frac{1}{24}\hat{c}_{111}(x_{11}^3 x_{11}^2 + x_{11}^2 x_{11}^3) + \\ & + \frac{1}{36}\hat{c}_{111}(x_{11}^3 x_{11} + 3x_{11}^2 x_{11}^2 + x_{11} x_{11}^3) - \frac{1}{144}\hat{c}_{111}(x_{11}^3 + 9x_{11}^2 x_{11} + 9x_{11} x_{11}^2 + x_{11}^3) + \\ & + \frac{1}{60}\hat{c}_{111}(x_{11}^2 + 3x_{11} x_{11} + x_{11}^2) - \frac{1}{72}\hat{c}_{111}(x_{11} + x_{11}) + \frac{1}{252}\hat{c}_{111} \\ \hat{d}_{111} = & 0,001; \hat{d}_{112} = 0,091; \hat{d}_{113} = -0,015; \hat{d}_{114} = 0,004; \hat{c}_{111} = -0,283 \end{aligned}$$

Untuk  $k = 1; i = 1; T = 2$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{112} = \hat{f}_{112} = & \hat{d}_{111} + \hat{d}_{112}x_{12} + \frac{1}{2}\hat{d}_{113}x_{12}^2 + \frac{1}{6}\hat{d}_{114}x_{12}^3 + \frac{1}{36}\hat{c}_{112}(x_{12}^3 x_{12}^3) - \frac{1}{24}\hat{c}_{112}(x_{12}^3 x_{12}^2 + x_{12}^2 x_{12}^3) + \\ & + \frac{1}{36}\hat{c}_{112}(x_{12}^3 x_{12} + 3x_{12}^2 x_{12}^2 + x_{12} x_{12}^3) - \frac{1}{144}\hat{c}_{112}(x_{12}^3 + 9x_{12}^2 x_{12} + 9x_{12} x_{12}^2 + x_{12}^3) + \\ & + \frac{1}{60}\hat{c}_{112}(x_{12}^2 + 3x_{12} x_{12} + x_{12}^2) - \frac{1}{72}\hat{c}_{112}(x_{12} + x_{12}) + \frac{1}{252}\hat{c}_{112} + \frac{1}{36}\hat{c}_{111}x_{12}^3 x_{11}^3 - \\ & - \frac{1}{24}\hat{c}_{111}x_{12}^3 x_{11}^2 + x_{12}^2 x_{11}^3) + \frac{1}{36}\hat{c}_{111}(x_{12}^3 x_{11} + 3x_{12}^2 x_{11}^2 + x_{12} x_{11}^3) - \\ & - \frac{1}{144}\hat{c}_{111}(x_{12}^3 + 9x_{12}^2 x_{11} + 9x_{12} x_{11}^2 + x_{11}^3) + \frac{1}{60}\hat{c}_{111}(x_{12}^2 + 3x_{12} x_{11} + x_{11}^2) - \\ & - \frac{1}{72}\hat{c}_{111}(x_{12} + x_{11}) + \frac{1}{252}\hat{c}_{111} \\ \hat{d}_{111} = & 0,001; \hat{d}_{112} = 0,091; \hat{d}_{113} = -0,015; \hat{d}_{114} = 0,004; \hat{c}_{111} = -0,283; \hat{c}_{112} = 0,692 \end{aligned}$$



#### Lampiran 5.14. (Lanjutan)

Untuk  $k = 1; i = 2; T = 1$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{121} = \hat{f}_{121} = & \hat{d}_{121} + \hat{d}_{122}x_{11} + \frac{1}{2}\hat{d}_{123}x_{11}^2 + \frac{1}{6}\hat{d}_{124}x_{11}^3 + \frac{1}{36}\hat{c}_{121}(x_{11}^3x_{11}^3) - \frac{1}{24}\hat{c}_{121}(x_{11}^3x_{11}^2 + x_{11}^2x_{11}^3) + \\ & + \frac{1}{36}\hat{c}_{121}(x_{11}^3x_{11} + 3x_{11}^2x_{11}^2 + x_{11}x_{11}^3) - \frac{1}{144}\hat{c}_{121}(x_{11}^3 + 9x_{11}^2x_{11} + 9x_{11}x_{11}^2 + x_{11}^3) + \\ & + \frac{1}{60}\hat{c}_{121}(x_{11}^2 + 3x_{11}x_{11} + x_{11}^2) - \frac{1}{72}\hat{c}_{121}(x_{11} + x_{11}) + \frac{1}{252}\hat{c}_{121} \\ \hat{d}_{121} = & -0,015; \hat{d}_{122} = 0,004; \hat{d}_{123} = 0,001; \hat{d}_{124} = 0,103; \hat{c}_{121} = -0,651\end{aligned}$$

Untuk  $k = 1; i = 1; T = 2$



### Lampiran 6.1. Regresi Parametrik (Linear Mixed Model)

Analisis regresi parametrik yang digunakan untuk data longitudinal adalah metode *Linear Mixed Model* (LMM). Metode ini merupakan pengembangan dari analisis dua-tahap (*two-stage analysis*) yang menggunakan pendekatan fungsi regresi linier pada setiap subjek (subjek-spesifik). Adapun dua tahapan tersebut adalah sebagai berikut:

a. Tahap Pertama

Pada tahap ini,  $y_{it}$  menunjukkan respon yang ingin diamati, untuk subyek ke- $i$ , diukur pada waktu pengamatan ke- $t$ . Model pada tahap pertama didefinisikan sebagai:

$$\tilde{y}_i = \mathbf{Z}_i \beta_i + \varepsilon_i$$
$$\begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{iT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{i1} & x_{i1}^2 & \cdots & x_{i1}^r \\ 1 & x_{i2} & x_{i2}^2 & \cdots & x_{i2}^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{iT} & x_{iT}^2 & \cdots & x_{iT}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{i0} \\ \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \\ \vdots \\ \beta_{ir} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{iT} \end{bmatrix},$$

dengan  $\tilde{y}_i$  adalah vektor respon pada subyek ke- $i$ ,  $\mathbf{Z}_i$  adalah matriks prediktor pada subyek ke- $i$ ,  $\beta_i$  adalah vektor koefisien regresi subyek-spesifik pada subyek ke- $i$ , dan  $\varepsilon_i$  adalah vektor *random error* pada subyek ke- $i$ .

b. Tahap Kedua

Pada tahap kedua, model regresi berikut digunakan untuk menjelaskan keragaman antar subyek dihubungkan dengan koefisien regresi subjek-spesifik  $\beta_i$ , dengan bentuk:

$$\tilde{\beta}_i = \mathbf{K}_i \beta + b_i$$

dengan  $\tilde{\beta}_i$  adalah vektor koefisien regresi subyek-spesifik yang didapatkan pada persamaan pertama,  $\mathbf{K}_i$  matriks prediktor,  $\beta$  vektor koefisien regresi, dan  $b_i$  adalah vektor *random error* yang menyatakan efek *random* pada LMM.

LMM dilakukan dengan cara mengkombinasikan analisis dua-tahap ke dalam model tunggal, yaitu dengan mensubstitusikan  $\tilde{\beta}_i$  pada persamaan kedua ke dalam persamaan pertama, maka diperoleh:

$$\tilde{y}_i = \mathbf{X}_i \beta + \mathbf{Z}_i b_i + \varepsilon_i,$$

di mana  $\mathbf{X}_i = \mathbf{Z}_i \mathbf{K}_i$  matriks yang menyatakan prediktor yang diketahui,  $\beta$  merupakan efek tetap dan  $b_i$  efek subjek-spesifik yang diasumsikan bersifat random, sehingga  $b_i$  biasa disebut efek acak dengan  $b_i \sim N(0, \mathbf{D})$ , serta  $\varepsilon_i$  adalah vektor *random error* dengan  $\varepsilon_i \sim N(0, \mathbf{\Sigma})$  (Verbeke dan Molenbergs, 2000)



## Lampiran 6.2. Hasil Estimasi Regresi Parametrik (Linear Mixed Model)

Pemilihan orde  $m$  pada Data Aplikasi

$m$	2	3	4	5
$R^2$	0.1357	0.2518	0.2970	0.3385
RMSE	1.493	1.440	1.418	1.396

The Mixed Procedure  
Fit Statistics  
-2 Res Log Likelihood 355.1  
AIC (smaller is better) 365.1  
AICC (smaller is better) 366.0  
BIC (smaller is better) 362.0  
Null Model Likelihood Ratio Test  
DF Chi-Square Pr > ChiSq  
4 2.08 0.7211

### Solution for Fixed Effects

Effect	VAR	Estimate	Standard Error	DF	t Value	Pr >  t
x12*VAR	0	-0.02907	0.01938	70	-1.50	0.1381
x12*VAR	1	0.007662	0.01982	70	0.39	0.7002
x13*VAR	0	0.002036	0.001475	70	1.38	0.1719
x13*VAR	1	-0.00053	0.001516	70	-0.35	0.7258
x14*VAR	0	-0.00004	0.000031	70	-1.36	0.1767
x14*VAR	1	9.695E-6	0.000032	70	0.31	0.7596
x2*VAR	0	-0.2428	4.7533	70	-0.05	0.9594
x2*VAR	1	4.1072	5.0360	70	0.82	0.4175
x22*VAR	0	0.05109	0.5939	70	0.09	0.9317
x22*VAR	1	-0.5316	0.6306	70	-0.84	0.4021
x23*VAR	0	-0.00273	0.02484	70	-0.11	0.9128
x23*VAR	1	0.02317	0.02642	70	0.88	0.3835
x24*VAR	0	0.000045	0.000347	70	0.13	0.8972
x24*VAR	1	-0.00034	0.000369	70	-0.91	0.3654
x3*VAR	0	-0.02645	0.07840	70	-0.34	0.7369
x3*VAR	1	-0.05480	0.08274	70	-0.66	0.5099
x32*VAR	0	0.000863	0.002438	70	0.35	0.7243
x32*VAR	1	0.002393	0.002602	70	0.92	0.3609
x33*VAR	0	-0.00001	0.000029	70	-0.37	0.7153
x33*VAR	1	-0.00003	0.000031	70	-1.13	0.2628
x34*VAR	0	4.144E-8	0	70	Infy	<.0001
x34*VAR	1	1.496E-7	0	70	Infy	<.0001

### Solution for Random Effects

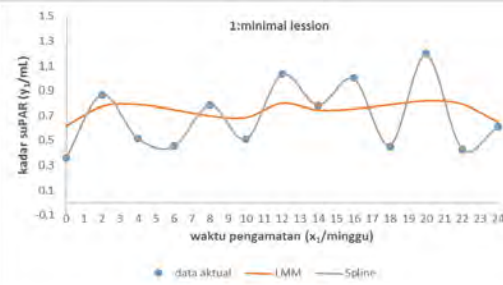
Effect	Subyek	VAR	Estimate	Pred DF	t Value	Pr >  t
T1*VAR	1	0	0.006481	70	-0.96	0.3379
T1*VAR	1	1	-0.01592	70	-1.07	0.2873
T1*VAR	2	0	-0.01096	70	-1.73	0.0887
T1*VAR	2	1	-0.01739	70	-1.19	0.2392
T1*VAR	3	0	0.01360	70	1.91	0.0598
T1*VAR	3	1	0.02526	70	1.60	0.1139
T1*VAR	4	0	0.002665	70	0.32	0.7467
T1*VAR	4	1	0.006150	70	0.35	0.7271

### Type 3 Tests of Fixed Effects

Effect	Num DF	Den DF	F Value	Pr > F
x12*VAR	2	70	1.20	0.3060
x13*VAR	2	70	1.02	0.3647
x14*VAR	2	70	0.99	0.3768
x2*VAR	2	70	0.34	0.7145
x22*VAR	2	70	0.37	0.6952
x23*VAR	2	70	0.40	0.6725
x24*VAR	2	70	0.43	0.6498
x3*VAR	2	70	0.26	0.7684
x32*VAR	2	70	0.46	0.6306
x33*VAR	2	70	0.67	0.5128
x34*VAR	2	70	0.83	0.4413



## Lampiran 7. Perbandingan Hasil Estimasi pada Model Regresi Parametrik dan Nonparametrik



(a)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *Minimal Lesson*



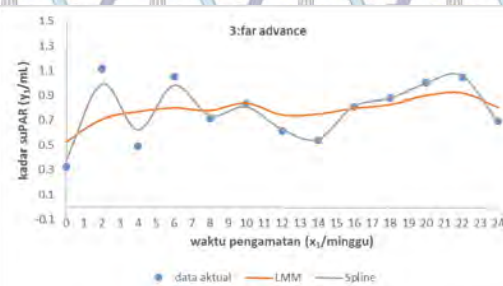
(b)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *Minimal Lesson*



(c)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *Mod Advance*



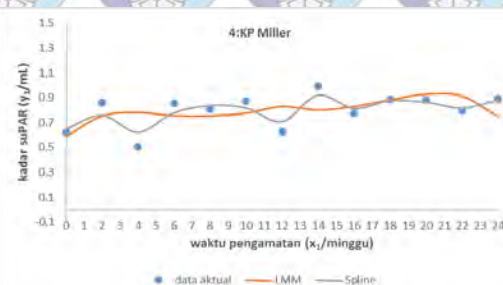
(d)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *Mod Advance*



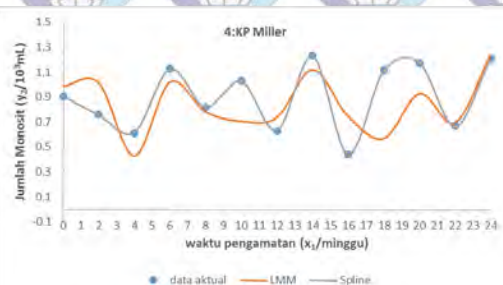
(e)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *Far Advance*



(f)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *Far Advance*



(g)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *KP Miller*



(h)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *KP Miller*



## Lampiran 8.1. Syntax Program R pada Data Bangkitan

```
# ESTIMATOR SPLINE PADA REGRESI NONPARAMETRIK BIRESPON UNTUK DATA LONGITUDINAL
# DATA SIMULASI/BANGKITAN
# Library aktifkan Library(MASS)
# Inputk ukuran sampel (n), orde polinomial (m), fungsi bangkitan (fb), varian error (W)

n=50 #ukuran sampel, variasi n=10,20,50,100
fb=4 #fungsi bangkitan (1=EE,2=TT,3=PP,4=ET,5=EP,6=TP)
r=3 #ukuran subyek, ditetapkan r=3
k=2 #banyaknya variabel respon, ditetapkan k=2
kr=k*r

set.seed(3) #data bangkitan memberikan hasil yang sama setiap percobaan...

# Fungsi Reproducing Kernel
Rep.Kernel=function(dt)
{
  R=function(s,t)
  {
    integrand=function(u) {s*t-u*(s+t)+u^2}
    value=integrate(integrand,lower=0,upper=min(s,t))
    return(value$value)
  }
  nt=length(dt)
  Rt=matrix(c(rep(0,nt*nt)),nt,nt)
  for (it in 1:nt)
  {
    for (jt in 1:nt)
    {
      Rt[it,jt]=R(dt[it],dt[jt])
    }
  }
  return(Rt)
}

# Fungsi Bangkitan
x=1:n
x11v=(2*x-1)/(2*n)
x12v=(2*x-1)/(2*n)
x13v=(2*x-1)/(2*n)

x21v=runif(n,0,1)
x22v=runif(n,0,1)
x23v=runif(n,0,1)
x1v=rbind(x11v,x12v,x13v,x11v,x12v,x13v)
x2v=rbind(x21v,x22v,x23v,x21v,x22v,x23v)

if (fb==1)
{
  f11v= 4.26*(exp(-3.25*x11v)-4*exp(-6.50*x11v)+3*exp(-9.75*x11v))+ 4.26*(exp(-3.25*x21v)-4*exp(-6.50*x21v)+3*exp(-9.75*x21v))
  f12v= 3.69*(exp(-2.20*x12v)-4*exp(-6.85*x12v)+3*exp(-8.22*x12v))+ 3.69*(exp(-2.20*x22v)-4*exp(-6.85*x22v)+3*exp(-8.22*x22v))
  f13v= 5.05*(exp(-3.92*x13v)-4*exp(-7.34*x13v)+3*exp(-8.75*x13v))+ 5.05*(exp(-3.92*x23v)-4*exp(-7.34*x23v)+3*exp(-8.75*x23v))
  f21v= 5.12*(exp(-3.99*x11v)-4*exp(-7.26*x11v)+3*exp(-9.73*x11v))+ 5.12*(exp(-3.99*x21v)-4*exp(-7.26*x21v)+3*exp(-9.73*x21v))
  f22v= 4.48*(exp(-2.48*x12v)-4*exp(-6.20*x12v)+3*exp(-9.17*x12v))+ 4.48*(exp(-2.48*x22v)-4*exp(-6.20*x22v)+3*exp(-9.17*x22v))
  f23v= 3.31*(exp(-3.19*x13v)-4*exp(-7.15*x13v)+3*exp(-9.27*x13v))+ 3.31*(exp(-3.19*x23v)-4*exp(-7.15*x23v)+3*exp(-9.27*x23v))
}

if (fb==2)
{
  f11v=(sin(2*pi*x11v))^3+(sin(2*pi*x21v))^3
  f12v=(sin(2*pi*x12v^2))^3+(sin(2*pi*x22v^2))^3
  f13v=(sin(2*pi*x13v^3))^3+(sin(2*pi*x23v^3))^3
  f21v=(sin(2*pi*x11v^2))+ (sin(2*pi*x21v^2))
  f22v=(sin(2*pi*x12v))^2+ (sin(2*pi*x22v))^2
  f23v=(sin(2*pi*x13v^2))^2+(sin(2*pi*x23v^2))^2
}

if (fb==3)
{
  f11v=4*(x11v-1)*(1-x11v)^2+4*(x21v-1)*(1-x21v)^2
  f12v=3*(x12v-1)*(1-x12v)^2+3*(x22v-1)*(1-x22v)^2
}
```



## Lampiran 8.1. (Lanjutan)

```
f13v=1.5*(x13v-1)*(1-x13v)^2+1.5*(x23v-1)*(1-x23v)^2
f21v=3.5*(x11v-1)*(1-x11v)^2+3.5*(x21v-1)*(1-x21v)^2
f22v=4.5*(x12v-1)*(1-x12v)^2+4.5*(x22v-1)*(1-x22v)^2
f23v=2.5*(x13v-1)*(1-x13v)^2+2.5*(x23v-1)*(1-x23v)^2
}
if (fb==4)
{
f11v=4.26*(exp(+3.25*x11v)-4*exp(-6.50*x11v)+3*exp(-9.75*x11v))+(sin(2*pi*x21v))^3
f12v=3.69*(exp(+2.20*x12v)-4*exp(-6.85*x12v)+3*exp(-8.22*x12v))+(sin(2*pi*x22v^2))^3
f13v=5.05*(exp(-3.92*x13v)-4*exp(-7.34*x13v)+3*exp(-8.75*x13v))+(sin(2*pi*x23v^3))^3
f21v=5.12*(exp(-3.99*x11v)-4*exp(-7.26*x11v)+3*exp(-9.73*x11v))+(sin(2*pi*x21v^2))^3
f22v=4.48*(exp(-2.48*x12v)-4*exp(-6.20*x12v)+3*exp(-9.17*x12v))+(sin(2*pi*x22v))^2
f23v=3.31*(exp(-3.19*x13v)-4*exp(-7.15*x13v)+3*exp(-9.27*x13v))+(sin(2*pi*x23v^2))^2
}
if (fb==5)
{
f11v=4.26*(exp(-3.25*x11v)-4*exp(-6.5*x11v)+3*exp(-9.75*x11v))+4*(x21v-1)*(1-x21v)^2
f12v=3.75*(exp(-2.50*x12v)-4*exp(-5.4*x12v)+3*exp(-8.72*x12v))+3*(x22v-1)*(1-x22v)^2
f13v=6.53*(exp(-3.75*x13v)-4*exp(-6.8*x13v)+3*exp(-9.25*x13v))+1.5*(x23v-1)*(1-x23v)^2
f21v=4.26*(exp(-3.25*x11v)-4*exp(-6.5*x11v)+3*exp(-9.75*x11v))+3.5*(x21v-1)*(1-x21v)^2
f22v=3.75*(exp(-2.50*x12v)-4*exp(-5.4*x12v)+3*exp(-8.72*x12v))+4.5*(x22v-1)*(1-x22v)^2
f23v=6.53*(exp(-3.75*x13v)-4*exp(-6.8*x13v)+3*exp(-9.25*x13v))+2.5*(x23v-1)*(1-x23v)^2
}
if (fb==6)
{
f11v=(sin(2*pi*x11v))^3+4*(x21v-1)*(1-x21v)^2
f12v=(sin(2*pi*x12v^2))^3+3*(x22v-1)*(1-x22v)^2
f13v=(sin(2*pi*x13v^3))^3+1.5*(x23v-1)*(1-x23v)^2
f21v=(sin(2*pi*x11v^2))+3.5*(x21v-1)*(1-x21v)^2
f22v=(sin(2*pi*x12v))^2+4.5*(x22v-1)*(1-x22v)^2
f23v=(sin(2*pi*x13v^2))^2+2.5*(x23v-1)*(1-x23v)^2
}
fv=rbind(f11v,f12v,f13v,f21v,f22v,f23v)

##### Korelasi 0.4
rho=0.4
W<-matrix(c(rep(0,kr^2)),kr,kr)
W[1,1]<-0.5
W[2,2]<-0.7
W[3,3]<-0.6
W[4,4]<-0.4
W[5,5]<-0.6
W[6,6]<-0.8
W[1,4]<-rho*sqrt(0.5*0.4)
W[2,5]<-rho*sqrt(0.7*0.6)
W[3,6]<-rho*sqrt(0.6*0.8)
W[4,1]<-W[1,4]
W[5,2]<-W[2,5]
W[6,3]<-W[3,6]
ev=matrix(c(rep(0,n*kr)),n,kr)
ev=mvnrm(n,rep(0,kr),W)
Identitas=diag(n)
W=kroncker(W,Identitas)
W=ginv(W)
yv=fv+t(ev)
y=c(yv[1,],yv[2,],yv[3,],yv[4,],yv[5,],yv[6,])
x1=c(x1v[1,],x1v[2,],x1v[3,],x1v[4,],x1v[5,],x1v[6,])
x2=c(x2v[1,],x2v[2,],x2v[3,],x2v[4,],x2v[5,],x2v[6,])
id=rep(c(1:kr),rep(n,kr))
input=list(y=data.frame(y,id),x1=data.frame(x1,id),x2=data.frame(x2,id))
inp1=cbind(x1,x2,y)

m=2

#Matriks T dan V
T1.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*m*kr)),n*kr,m*kr)
V1.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*n*kr)),n*kr,n*kr)
T2.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*m*kr)),n*kr,m*kr)
V2.hitung=matrix(c(rep(0,n*kr*n*kr)),n*kr,n*kr)

for (j in 1:kr)
{
I=matrix(c(rep(0,kr^2)),kr,kr)
I[j,j]=1
T1.hitung=T1.hitung+kroncker(I,cbind(1,input$x1[,1][input$x1$id==j]))
T2.hitung=T2.hitung+kroncker(I,cbind(1,input$x2[,1][input$x2$id==j]))
T.hitung=T1.hitung+T2.hitung
V1.hitung=V1.hitung+kroncker(I,Rep.Kernel(input$x1[,1][input$x1$id==j]))

```



## Lampiran 8.1. (Lanjutan)

```

V2.hitung=V2.hitung+kronecker(I,Rep,Kernel(input$x2[,1][input$x2$id==j]))
V.hitung=V1.hitung+V2.hitung
}

#Optimasi GCV
I=diag(kr*n)
diagL=NULL
GCV=function(lambda)
{
  for (j in 1:kr) {diagL=c(diagL,rep(lambda[j],n))}
  L=diag(diagL)
  M=W%*%V.hitung+n*L
  A= T.hitung%*%ginv(t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%W%*%T.hitung)%*%t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%W+
    V.hitung%*%ginv(M)%*%W%*%(I-T.hitung%*%(ginv(t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%W%*%T.hitung)%*%
    t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%W))
  IA=I-A
  GCV=((1/(kr*n))*t(y)%*%t(IA)%*%IA%*%y)/(((1/(kr*n))*sum(diag(IA)))^2)
  return(GCV)
}

awal=NULL
bawah=NULL
atas=NULL
for (j in 1:kr)
{
  awal=c(awal,0)
  bawah=c(bawah,0)
  atas=c(atas,Inf)
}
opt.lambda=nlminb(start=awal,GCV,control=list(trace=1,iter,max=100,rel.tol=1e-
5),lower=bawah,upper=atas)
lambda.opt=opt.lambda$par
GCV.min=GCV(lambda.opt)

# Hitung Koefisien
Lopt=NULL
for (j in 1:kr) Lopt=c(Lopt,rep(lambda.opt[j],n))
L=diag(Lopt)
M=W%*%V.hitung+n*L
d=ginv(t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%W%*%T.hitung)%*%t(T.hitung)%*%ginv(M)%*%W%*%y
c=ginv(M)%*%W%*%(y-T.hitung%*%d)

#Prediksi Respon
f.duga=T.hitung%*%d+V.hitung%*%c
y.duga=f.duga
R2=(sum((y.duga-mean(y))^2))/(sum((y-mean(y))^2))
RMSE<-sqrt((sum((y-y.hat)^2)/(kr*n)))

#Hasil Koefisien
koef.d=matrix(c(rep(0,m*kr)),m,kr)
koef.c=matrix(c(rep(0,n*kr)),n,kr)
response=NULL
for (j in 1:kr) response=c(response,paste("Response ",j))
dimnames(koef.d)=list(NULL,response)
dimnames(koef.c)=list(NULL,response)

for (j in 0:(kr-1))
{
  for (k in 1:m)
  {
    koef.d[k,(j+1)]=d[(j*2)+k,1]
  }
}

for (j in 0:(kr-1))
{
  for (k in 1:n)
  {
    koef.c[k,(j+1)]=c[(j*2)+k,1]
  }
}

outlist=list(d=koef.d,c=koef.c,GCV=GCV.min,lambda=lambda.opt,R2=R2,RMSE=RMSE)
gof=c(R2,RMSE,GCV.min)
ddug=d
cdug=c

```



## Lampiran 8.2. Output Program R untuk Fungsi Percobaan EE

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 863200.93: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.097459001: 0.0127579 0.0127569 0.0127580 0.0127578 0.0127578 0.0127581
2: 0.094954595: 0.00960078 0.0139716 0.0144061 0.0125446 0.0123315 0.0136920
3: 0.093957870: 0.00849302 0.0144145 0.0149415 0.0124968 0.0121958 0.0140051
4: 0.092955400: 0.00747262 0.0150033 0.0155391 0.0124508 0.0119430 0.0141379
5: 0.091059255: 0.00542965 0.0161722 0.0167391 0.0123727 0.0114331 0.0144001
6: 0.090683058: 0.00440816 0.0167566 0.0173391 0.0123336 0.0111781 0.0145312
7: 0.090679732: 0.00440940 0.0167502 0.0173386 0.0123312 0.0111782 0.0145233
8: 0.090679594: 0.00440942 0.0167502 0.0173386 0.0123312 0.0111783 0.0145233
9: 0.090679594: 0.00440942 0.0167502 0.0173386 0.0123312 0.0111783 0.0145233
```

### Orde polinomial m=3

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 9497.2258: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.020254460: 0.0254375 0.0255764 0.0255784 0.0254790 0.0254514 0.0255700
2: 0.019811422: 0.0132874 0.0402759 0.0235715 0.0214011 0.0322920 0.0222159
3: 0.019738124: 0.0116409 0.0418735 0.0234868 0.0210343 0.0330738 0.0219280
4: 0.019573734: 0.00834143 0.0450608 0.0233278 0.0202716 0.0346381 0.0213842
5: 0.019528826: 0.00738469 0.0460458 0.0232720 0.0200333 0.0350197 0.0212642
6: 0.019520926: 0.00719400 0.0462431 0.0232635 0.0199840 0.0350957 0.0212386
7: 0.019520063: 0.00723637 0.0462545 0.0233918 0.0197658 0.0352075 0.0211629
8: 0.019520063: 0.00723637 0.0462545 0.0233918 0.0197658 0.0352075 0.0211629
9: 0.019520063: 0.00723637 0.0462545 0.0233918 0.0197658 0.0352075 0.0211629
10: 0.019520063: 0.00723637 0.0462545 0.0233918 0.0197658 0.0352075 0.0211629
11: 0.019520063: 0.00723637 0.0462545 0.0233918 0.0197658 0.0352075 0.0211629
12: 0.019519574: 0.00722605 0.0462808 0.0233731 0.0197694 0.0352164 0.0211570
13: 0.019494198: 0.00665716 0.0479474 0.0221886 0.0198545 0.0360262 0.0209533
14: 0.019488799: 0.00650648 0.0483925 0.0218702 0.0198765 0.0362450 0.0209011
15: 0.019480313: 0.00620520 0.0492825 0.0212333 0.0199203 0.0366829 0.0207970
16: 0.019476487: 0.00560102 0.0510636 0.0199609 0.0200089 0.0375564 0.0205864
17: 0.019476018: 0.00585759 0.0502081 0.0206386 0.0199805 0.0370732 0.0206268
18: 0.019476018: 0.00585768 0.0502079 0.0206388 0.0199805 0.0370731 0.0206268
19: 0.019476016: 0.00585776 0.0502078 0.0206388 0.0199804 0.0370730 0.0206268
20: 0.019476015: 0.00585780 0.0502078 0.0206388 0.0199803 0.0370730 0.0206268
21: 0.019476014: 0.00585781 0.0502078 0.0206388 0.0199803 0.0370730 0.0206267
22: 0.019476014: 0.00585782 0.0502078 0.0206388 0.0199803 0.0370730 0.0206267
23: 0.019476014: 0.00585782 0.0502078 0.0206388 0.0199803 0.0370730 0.0206267
24: 0.019476014: 0.00585782 0.0502078 0.0206388 0.0199803 0.0370730 0.0206267
25: 0.019476014: 0.00585782 0.0502078 0.0206388 0.0199803 0.0370730 0.0206267
26: 0.019476014: 0.00585782 0.0502078 0.0206388 0.0199803 0.0370730 0.0206267
27: 0.019476014: 0.00585782 0.0502078 0.0206388 0.0199803 0.0370730 0.0206267
```

### Orde polinomial m=4

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 110572.39: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.013249696: 0.0255102 0.0255205 0.0255192 0.0255112 0.0255133 0.0255186
2: 0.013179323: 0.0227962 0.0305048 0.0235864 0.0231605 0.0294809 0.0235633
3: 0.013145546: 0.0209904 0.0317702 0.0261546 0.0219579 0.0300711 0.0221468
4: 0.013121161: 0.0201933 0.0325805 0.0285463 0.0209060 0.0311585 0.0197060
5: 0.013113355: 0.0191411 0.0322426 0.0291367 0.0217233 0.0320376 0.0188094
6: 0.013108750: 0.0187207 0.0317859 0.0294134 0.0217169 0.0327332 0.0187206
7: 0.013108750: 0.0187207 0.0317859 0.0294134 0.0217169 0.0327332 0.0187206
8: 0.013108750: 0.0187207 0.0317859 0.0294134 0.0217169 0.0327332 0.0187206
```

### Orde polinomial m=5

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 632004.46: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.013287919: 0.0255146 0.0255164 0.0255162 0.0255147 0.0255151 0.0255161
2: 0.013197654: 0.0212685 0.0313580 0.0257549 0.0226571 0.0262867 0.0257675
3: 0.012956588: 0.00404267 0.0547617 0.0275371 0.0116304 0.0289680 0.0261510
4: 0.012939782: 0.00395891 0.0548637 0.0275529 0.0115729 0.0289852 0.0261573
5: 0.012850782: 0.00352115 0.0554922 0.0276386 0.0111727 0.0292257 0.0260405
6: 0.012842794: 0.00350488 0.0555581 0.0276536 0.0111145 0.0292261 0.0260336
7: 0.012841187: 0.00350425 0.0555694 0.0276586 0.0111014 0.0292257 0.0260314
8: 0.012840975: 0.00350193 0.0555719 0.0276582 0.0111007 0.0292268 0.0260313
9: 0.012839661: 0.00349917 0.0555725 0.0276587 0.0110907 0.0292368 0.0260328
10: 0.012839077: 0.00349855 0.0555731 0.0276597 0.0110860 0.0292400 0.0260335
11: 0.012838962: 0.00349844 0.0555732 0.0276598 0.0110851 0.0292406 0.0260336
12: 0.012838851: 0.00349799 0.0555734 0.0276600 0.0110843 0.0292413 0.0260337
13: 0.012838807: 0.00349781 0.0555735 0.0276600 0.0110841 0.0292416 0.0260338
14: 0.012838719: 0.00349744 0.0555737 0.0276601 0.0110835 0.0292422 0.0260339
15: 0.012838432: 0.00349800 0.0555742 0.0276606 0.0110808 0.0292422 0.0260331
```



## Lampiran 8.2. (Lanjutan)

```

16: 0.012838401: 0.00349798 0.0555742 0.0276607 0.0110805 0.0292422 0.0260352
17: 0.012838337: 0.00349794 0.0555743 0.0276608 0.0110800 0.0292424 0.0260354
18: 0.012838215: 0.00349807 0.0555745 0.0276610 0.0110789 0.0292426 0.0260358
19: 0.012838167: 0.00349812 0.0555745 0.0276611 0.0110785 0.0292426 0.0260360
20: 0.012838157: 0.00349813 0.0555745 0.0276611 0.0110784 0.0292426 0.0260360
21: 0.012838137: 0.00349814 0.0555746 0.0276611 0.0110782 0.0292427 0.0260361
22: 0.012838131: 0.00349815 0.0555746 0.0276612 0.0110781 0.0292427 0.0260361
23: 0.012838131: 0.00349815 0.0555746 0.0276612 0.0110781 0.0292427 0.0260361

```

## Output m=5

```

Sd
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] -1.2045819 -6.77619986 1.19488208 6.2697544 26.1061452
[2,] 4.5029345 0.39771706 -0.09964363 -21.3468363 14.2898221
[3,] -6.7761999 1.19488208 6.26975441 26.1061452 -0.2356586
[4,] 0.3977171 -0.09964363 -21.34683627 14.2898221 3.8284821
[5,] 1.1948821 6.26975441 26.10614515 -0.2356586 -13.1777442
Response 6
[1,] -0.2356586
[2,] 3.8284821
[3,] -13.1777442
[4,] 16.3138385
[5,] 9.6714023
Sc
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] 0.92570114 -0.44389643 -0.11057536 -0.51795912 0.30877874
[2,] -0.28286171 -0.27803389 0.14938236 0.45886902 0.14027981
[3,] -0.44389643 -0.11057536 -0.51795912 0.30877874 0.17004369
[4,] -0.27803389 0.14938236 0.45886902 0.14027981 0.06304995
[5,] -0.11057536 -0.51795912 0.30877874 0.17004369 -0.06990292
[6,] 0.14938236 0.45886902 0.14027981 0.06304995 -0.15431977
[7,] -0.51795912 0.30877874 0.17004369 -0.06990292 -0.13843584
[8,] 0.45886902 0.14027981 0.06304995 -0.15431977 0.04343501
[9,] 0.30877874 0.17004369 -0.06990292 -0.13843584 -0.64709415
[10,] 0.14027981 0.06304995 -0.15431977 0.04343501 0.03159485
[11,] 0.17004369 -0.06990292 -0.13843584 -0.64709415 0.26439846
[12,] 0.06304995 -0.15431977 0.04343501 0.03159485 0.08754641
[13,] -0.06990292 -0.13843584 -0.64709415 0.26439846 0.05704465
[14,] -0.15431977 0.04343501 0.03159485 0.08754641 0.04850210
[15,] -0.13843584 -0.64709415 0.26439846 0.05704465 -0.05820812
[16,] 0.04343501 0.03159485 0.08754641 0.04850210 -0.03159675
[17,] -0.64709415 0.26439846 0.05704465 -0.05820812 -0.06381697
[18,] 0.03159485 0.08754641 0.04850210 -0.03159675 0.04382864
[19,] 0.26439846 0.05704465 -0.05820812 -0.06381697 0.01073594
[20,] 0.08754641 0.04850210 -0.03159675 0.04382864 0.04162816
Response 6
[1,] 0.17004369
[2,] 0.06304995
[3,] -0.06990292
[4,] -0.15431977
[5,] -0.13843584
[6,] 0.04343501
[7,] -0.64709415
[8,] 0.03159485
[9,] 0.26439846
[10,] 0.08754641
[11,] 0.05704465
[12,] 0.04850210
[13,] -0.05820812
[14,] -0.03159675
[15,] -0.06381697
[16,] 0.04382864
[17,] 0.01073594
[18,] 0.04162816
[19,] 0.07312787
[20,] -0.02989896
SGCV
[1,]
[1,] 0.01283813
Slambda
[1] 0.003498147 0.055574582 0.027661152 0.011078138 0.029242674 0.026036107
SR2
[1] 0.9770318
SMSE
[1] 0.007968931

```



### Lampiran 8.3. Output Program R untuk Fungsi Percobaan TT

#### Orde polinomial m=2

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 3509155.2: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.51513055: 0.0510304 0.0510323 0.0510324 0.0510294 0.0510294 0.0510324
2: 0.41843106: 0.0924941 0.0519521 0.0492624 0.00458036 0.0518857 0.0560104
3: 0.41843059: 0.0927410 0.0518702 0.0493810 0.00452065 0.0517670 0.0559053
4: 0.41842595: 0.0928813 0.0517969 0.0493535 0.00452467 0.0517247 0.0559041
5: 0.41842074: 0.0930180 0.0517274 0.0493417 0.00453518 0.0516629 0.0559000
6: 0.41842072: 0.0930292 0.0517231 0.0493432 0.00453314 0.0516512 0.0559054
7: 0.41842072: 0.0930292 0.0517231 0.0493432 0.00453314 0.0516512 0.0559054
```

#### Orde polinomial m=3

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 9431.8801: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.27185008: 0.0508359 0.0511370 0.0511434 0.0509840 0.0509074 0.0511775
2: 0.26876019: 0.0492033 0.0555294 0.0516850 0.0382447 0.0528209 0.0586567
3: 0.26747184: 0.0489845 0.0568327 0.0520866 0.0340473 0.0535512 0.0606257
4: 0.26401181: 0.0485563 0.0594345 0.0528909 0.0256494 0.0550113 0.0645613
5: 0.26251166: 0.0484184 0.0602742 0.0531506 0.0229383 0.0554825 0.0658317
6: 0.25860287: 0.0481425 0.0619538 0.0536700 0.0175162 0.0564251 0.0683725
7: 0.25690497: 0.0480486 0.0625256 0.0538468 0.0156703 0.0567460 0.0692374
8: 0.25284620: 0.0478608 0.0636691 0.0542004 0.0119786 0.0573877 0.0709674
9: 0.25130891: 0.0477964 0.0640617 0.0543218 0.0107113 0.0576080 0.0715612
10: 0.24871311: 0.0476674 0.0648468 0.0545646 0.00817672 0.0580486 0.0727489
11: 0.24786238: 0.0397347 0.0654682 0.0582416 0.00759797 0.0619458 0.0730332
12: 0.24752319: 0.0365508 0.0657683 0.0596951 0.00738898 0.0634950 0.0731107
13: 0.24691862: 0.0311721 0.0699631 0.0621880 0.00704568 0.0647035 0.0709106
14: 0.24664100: 0.0289864 0.0716464 0.0632340 0.00690827 0.0650670 0.0701297
15: 0.24542935: 0.0218451 0.0677763 0.0666242 0.00655310 0.0736399 0.0695286
16: 0.24542935: 0.0218451 0.0677763 0.0666242 0.00655310 0.0736399 0.0695286
17: 0.24542935: 0.0218451 0.0677763 0.0666242 0.00655310 0.0736399 0.0695286
18: 0.24542935: 0.0218451 0.0677763 0.0666242 0.00655310 0.0736399 0.0695286
19: 0.24542935: 0.0218451 0.0677763 0.0666242 0.00655310 0.0736399 0.0695286
```

#### Orde polinomial m=4

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 28740.137: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.27873795: 0.407617 0.408477 0.408561 0.408066 0.408265 0.408504
2: 0.23876019: 0.0492033 0.0555294 0.0516850 0.0382447 0.0528209 0.0586567
3: 0.23747184: 0.0489845 0.0568327 0.0520866 0.0340473 0.0535512 0.0606257
4: 0.23401181: 0.0485563 0.0594345 0.0528909 0.0256494 0.0550113 0.0645613
5: 0.23251166: 0.0484184 0.0602742 0.0531506 0.0229383 0.0554825 0.0658317
6: 0.22860287: 0.0481425 0.0619538 0.0536700 0.0175162 0.0564251 0.0683725
7: 0.21690497: 0.0480486 0.0625256 0.0538468 0.0156703 0.0567460 0.0692374
8: 0.21284620: 0.0478608 0.0636691 0.0542004 0.0119786 0.0573877 0.0709674
9: 0.21130891: 0.0477964 0.0640617 0.0543218 0.0107113 0.0576080 0.0715612
10: 0.20871311: 0.0476674 0.0648468 0.0545646 0.00817672 0.0580486 0.0727489
11: 0.20786238: 0.0397347 0.0654682 0.0582416 0.00759797 0.0619458 0.0730332
12: 0.19873614: 0.407178 0.409041 0.408463 0.407453 0.407947 0.409406
```

#### Orde polinomial m=5

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 125577.20: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.19877738: 0.408108 0.408300 0.408321 0.408203 0.408251 0.408307
2: 0.19877558: 0.407682 0.408868 0.408220 0.407608 0.407895 0.409216
```

#### Output m=4

```
$d
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] -0.6321393 -67.93229985 0.04166407 9.327178324 -0.006284836
[2,] 12.8231421 133.53867621 -0.49251203 -29.479281735 -1.847571824
[3,] -67.9322998 0.04166407 9.32717832 -0.006284836 21.520575798
[4,] 133.5386762 -0.49251203 -29.47928173 -1.847571824 -61.698743844
Response 6
[1,] 21.520576
[2,] -61.698744
[3,] -1.106228
[4,] 11.776464
```



### Lampiran 8.3. (Lanjutan)

```

Sc
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] 2.523110e-02 -0.004272758 -0.006941616 -0.011495079 0.008217238
[2,] -8.098903e-05 -0.021831948 -0.008304212 -0.022756188 0.011265130
[3,] -4.272758e-03 -0.006941616 -0.011495079 0.008217238 0.015577735
[4,] -2.183195e-02 -0.008304212 -0.022756188 0.011265130 0.015985800
[5,] -6.941616e-03 -0.011495079 0.008217238 0.015577735 0.015367646
[6,] -8.304212e-03 -0.022756188 0.011265130 0.015985800 0.010864084
[7,] -1.149508e-02 0.008217238 0.015577735 0.015367646 -0.016239532
[8,] -2.275619e-02 0.011265130 0.015985800 0.010864084 -0.028744885
[9,] 8.217238e-03 0.015577735 0.015367646 -0.016239532 -0.010837668
[10,] 1.126513e-02 0.015985800 0.010864084 -0.028744885 -0.011073948
[11,] 1.557773e-02 0.015367646 -0.016239532 -0.010837668 0.010284364
[12,] 1.598580e-02 0.010864084 -0.028744885 -0.011073948 0.029785731
[13,] 1.536765e-02 -0.016239532 -0.010837668 0.010284364 -0.011315277
[14,] 1.086408e-02 -0.028744885 -0.011073948 0.029785731 0.007578728
[15,] -1.623953e-02 -0.010837668 0.010284364 -0.011315277 0.003991329
[16,] -2.874489e-02 -0.011073948 0.029785731 0.007578728 0.011564819
[17,] -1.083767e-02 0.010284364 -0.011315277 0.003991329 0.039629451
[18,] -1.107395e-02 0.029785731 0.007578728 0.011564819 0.012894928
[19,] 1.028436e-02 -0.011315277 0.003991329 0.039629451 0.024330592
[20,] 2.978573e-02 0.007578728 0.011564819 0.012894928 -0.009969249

Response 6
[1,] 0.015577735
[2,] 0.015985800
[3,] 0.015367646
[4,] 0.010864084
[5,] -0.016239532
[6,] -0.028744885
[7,] -0.010837668
[8,] -0.011073948
[9,] 0.010284364
[10,] 0.029785731
[11,] -0.011315277
[12,] 0.007578728
[13,] 0.003991329
[14,] 0.011564819
[15,] 0.039629451
[16,] 0.012894928
[17,] 0.024330592
[18,] -0.009969249
[19,] -0.039525787
[20,] -0.037873345

SGCV
[1,] 0.1987361

Slambda
[1] 0.4071782 0.4090405 0.4084626 0.4074526 0.4079473 0.4094060
SR2
[1] 0.8239861
SMSE
[1] 0.127401

```



## Lampiran 8.4. Output Program R untuk Fungsi Percobaan PP

### Orde polinomial m=2

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 13642110.: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.28395027: 0.0127577 0.0127578 0.0127579 0.0127576 0.0127576 0.0127579
2: 0.26299970: 0.00337406 0.0164264 0.0227792 0.00768307 0.0102992 0.0159843
3: 0.25599988: 0.00416250 0.0160346 0.0257991 0.00812045 0.0104082 0.0144730
```

### Lampiran 8. (Lanjutan)

```
4: 0.25595303: 0.00426117 0.0159856 0.0261766 0.00817502 0.0104218 0.0142842
5: 0.25595301: 0.00426425 0.0159840 0.0261884 0.00817672 0.0104222 0.0142783
6: 0.25595283: 0.00426430 0.0159840 0.0261885 0.00817675 0.0104222 0.0142782
7: 0.25595280: 0.00426430 0.0159840 0.0261885 0.00817675 0.0104222 0.0142782
8: 0.25595280: 0.00426430 0.0159840 0.0261885 0.00817675 0.0104222 0.0142782
```

### Orde polinomial m=3

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 255788.26: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.0076936068: 0.0127578 0.0127578 0.0127578 0.0127577 0.0127576 0.0127578
2: 0.007553392: 0.0103993 0.0135417 0.0144073 0.0108715 0.0129009 0.0144260
3: 0.0074087397: 0.00840702 0.0144632 0.0158522 0.00931162 0.0128045 0.0157079
4: 0.0073938103: 0.00819890 0.0145974 0.0158993 0.00918917 0.0128443 0.0158174
5: 0.0073897847: 0.00818747 0.0146638 0.0159256 0.00907117 0.0129027 0.0157958
6: 0.0073892880: 0.00818638 0.0146721 0.0159286 0.00905614 0.0129097 0.0157936
7: 0.0073892868: 0.00818639 0.0146721 0.0159286 0.00905614 0.0129097 0.0157936
8: 0.0073892868: 0.00818639 0.0146721 0.0159286 0.00905614 0.0129097 0.0157936
```

### Orde polinomial m=4

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 6393310.3: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 1.5943126e-25: 0.204124 0.204124 0.204124 0.204124 0.204124 0.204124
2: 1.5943126e-25: 0.204124 0.204124 0.204124 0.204124 0.204124 0.204124
```

### Orde polinomial m=5

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 43134472.: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 5.2004932e-06: 0.0255155 0.0255155 0.0255155 0.0255155 0.0255155 0.0255155
2: 5.2004688e-06: 0.0255123 0.0255170 0.0255171 0.0255130 0.0255161 0.0255175
```

### Output m=4

```
$d
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] -3.752806 -11.672188 7.341571 -1.413924 -4.372609
[2,] 9.424510 -2.888952 -9.149471 3.544611 -3.283519
[3,] -11.672188 7.341571 -1.413924 -4.372609 8.234163
Response 6
[1,] 8.234163
[2,] -10.159918
[3,] -4.330274

$e
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] -0.23911960 0.09180946 0.03510957 0.096502587 -0.013358061
[2,] -0.20330142 0.18725085 0.04550423 0.212398922 -0.081628051
[3,] 0.09180946 0.03510957 0.09650259 -0.013358061 -0.030863357
[4,] 0.18725085 0.04550423 0.21239892 -0.081628051 -0.060839855
[5,] 0.03510957 0.09650259 -0.013358061 -0.030863357 -0.102008418
[6,] 0.04550423 0.21239892 -0.081628051 -0.060839855 -0.114459014
[7,] 0.09650259 -0.013358061 -0.030863357 -0.102008418 -0.064358293
[8,] 0.21239892 -0.081628051 -0.06083986 -0.114459014 -0.063081829
[9,] -0.013358061 -0.030863357 -0.10200842 -0.064358293 -0.063703213
[10,] -0.081628051 -0.06083986 -0.114459014 -0.063081829 0.013489015
[11,] -0.030863357 -0.10200842 -0.064358293 -0.063703213 0.154501461
[12,] -0.06083986 -0.114459014 -0.06308183 -0.013489015 0.200154184
[13,] -0.10200842 -0.064358293 -0.063703213 0.154501461 -0.189136237
[14,] -0.114459014 -0.06308183 0.01348902 0.200154184 -0.168018101
[15,] -0.064358293 -0.063703213 0.154501461 -0.189136237 0.157980666
[16,] -0.06308183 0.01348902 0.200154184 -0.168018101 0.201775343
[17,] -0.063703213 0.154501461 -0.18913624 0.157980666 -0.001744564
[18,] 0.01348902 0.200154184 -0.168018101 0.201775343 0.222878566
[19,] 0.154501461 -0.18913624 0.15798067 -0.001744564 -0.039300844
[20,] 0.200154184 -0.168018101 0.20177534 0.222878566 0.053414411
Response 6
[1,] -0.030863357
[2,] -0.060839855
```



#### Lampiran 8.4. (Lanjutan)

```
[3,] -0.102008418
[4,] -0.114459014
[5,] -0.064358293
[6,] -0.063081829
[7,] -0.063703213
[8,] 0.013489015
[9,] 0.154501461
[10,] 0.200154184
[11,] -0.189136237
[12,] -0.168018101
[13,] 0.157980666
[14,] 0.201775343
[15,] -0.001744564
[16,] 0.222878566
[17,] -0.039300844
[18,] 0.053414411
[19,] 0.100231473
[20,] -0.019838334
```

\$GCV

[,1]

[1,] 1.594313e-25

\$lambda

[1] 0.2041241 0.2041241 0.2041241 0.2041241 0.2041241 0.2041241

\$R2

[1] 0.9887

\$MSE

[1] 1.051787e-25



## Lampiran 8.5. Output Program R untuk Fungsi Percobaan ET

### Orde polinomial m=2

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 1544858.0: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.32296094: 0.0127577 0.0127581 0.0127578 0.0127573 0.0127575 0.0127582
2: 0.31747948: 0.00639237 0.00937147 0.0153747 0.0124840 0.0129401 0.0199838
3: 0.31747946: 0.00639237 0.00937147 0.0153747 0.0124840 0.0129401 0.0199838
4: 0.31747946: 0.00639237 0.00937147 0.0153747 0.0124840 0.0129401 0.0199838
```

### Orde polinomial m=3

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 8394.9712: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.18985108: 0.0126048 0.0128154 0.0127718 0.0127236 0.0128114 0.0128182
2: 0.18861154: 0.0114043 0.0150503 0.0116627 0.0115887 0.0150757 0.0117329
3: 0.18839188: 0.0108150 0.0162095 0.0110685 0.0110168 0.0161645 0.0112250
4: 0.18839165: 0.0107967 0.0162497 0.0110549 0.0109998 0.0161936 0.0112040
5: 0.18839165: 0.0107967 0.0162497 0.0110549 0.0109998 0.0161936 0.0112040
6: 0.18839165: 0.0107967 0.0162497 0.0110549 0.0109998 0.0161936 0.0112040
7: 0.18839165: 0.0107967 0.0162497 0.0110549 0.0109998 0.0161936 0.0112040
```

### Orde polinomial m=4

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 50539.690: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.19076577: 0.0127277 0.0127685 0.0127567 0.0127628 0.0127628 0.0127681
2: 0.18892904: 0.0112082 0.0150190 0.0116407 0.0119015 0.0149846 0.0117872
3: 0.18830175: 0.0104411 0.0161045 0.0111042 0.0115292 0.0161296 0.0112300
4: 0.18706050: 0.00968251 0.0164101 0.0111802 0.0113877 0.0166385 0.0112375
5: 0.18686242: 0.00958438 0.0163758 0.0113692 0.0110839 0.0169479 0.0111751
6: 0.18678091: 0.00953566 0.0163559 0.0114601 0.0109322 0.0171053 0.0111470
7: 0.18677146: 0.00952916 0.0163475 0.0114661 0.0109163 0.0171282 0.0111464
8: 0.18677028: 0.00952854 0.0163468 0.0114669 0.0109140 0.0171310 0.0111466
9: 0.18677014: 0.00952855 0.0163468 0.0114666 0.0109140 0.0171309 0.0111469
10: 0.18677006: 0.00952854 0.0163468 0.0114665 0.0109140 0.0171308 0.0111470
11: 0.18677005: 0.00952854 0.0163468 0.0114665 0.0109140 0.0171308 0.0111470
12: 0.18677005: 0.00952854 0.0163468 0.0114665 0.0109140 0.0171308 0.0111470
13: 0.18677005: 0.00952854 0.0163468 0.0114665 0.0109140 0.0171308 0.0111470
```

### Orde polinomial m=5

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 583458.23: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.19096965: 0.0127551 0.0127587 0.0127577 0.0127582 0.0127582 0.0127587
2: 0.18531580: 0.00984763 0.0139201 0.0137085 0.0115133 0.0130987 0.0144576
3: 0.17957623: 0.00452068 0.0158450 0.0155237 0.00929320 0.0140374 0.0173244
4: 0.17608683: 0.00470618 0.0155591 0.0164193 0.00830909 0.0139212 0.0176296
5: 0.17602623: 0.00472412 0.0155703 0.0163729 0.00826172 0.0139593 0.0176562
6: 0.17596384: 0.00474299 0.0155929 0.0163293 0.00821074 0.0139966 0.0176720
7: 0.17592729: 0.00475445 0.0156066 0.0163029 0.00817982 0.0140192 0.0176815
8: 0.17592729: 0.00475445 0.0156066 0.0163029 0.00817982 0.0140192 0.0176815
9: 0.17592729: 0.00475445 0.0156066 0.0163029 0.00817982 0.0140192 0.0176815
```

### Output m=5

```
$d
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] -0.2861594 -8.07696566 6.47757738 2.0096427 -1.8765140
[2,] 2.5116202 9.63382175 0.03532692 -3.4100364 -0.5588419
[3,] -8.0769657 6.47757738 2.00964269 -1.8765140 -0.3307609
[4,] 9.6338218 0.03532692 -3.41003643 -0.5588419 2.9856730
[5,] 6.4775774 2.00964269 -1.87651397 -0.3307609 -5.2569887
Response 6
[1,] -0.3307609
[2,] 2.9856730
[3,] -5.2569887
[4,] -3.0006597
[5,] -0.8897794
$e
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] 2.53656925 -0.28607800 -0.25487906 -0.474894688 0.206704370
[2,] -2.74283476 -1.25832903 0.52523563 -1.830753307 0.059018815
[3,] -0.28607800 0.25487906 -0.47489469 0.206704370 0.356138940
[4,] -1.25832903 0.52523563 -1.83075331 0.059018815 0.429908638
[5,] 0.25487906 -0.47489469 0.20670437 0.356138940 0.793837999
[6,] 0.52523563 -1.83075331 0.05901882 0.429908638 1.578382542
[7,] -0.47489469 0.20670437 0.35613894 0.793837999 -0.868853794
[8,] -1.83075331 0.05901882 0.42990864 1.578382542 -2.250264535
```



### Lampiran 8.5. (Lanjutan)

[9,]	0.20670437	0.35613894	0.79383800	-0.868853794	0.338225776
[10,]	0.05901882	0.42990864	1.57838254	-2.250264535	1.131373682
[11,]	0.35613894	0.79383800	-0.86885379	0.338225776	0.901705506
[12,]	0.42990864	1.57838254	-2.25026454	1.131373682	0.600067489
[13,]	0.79383800	-0.86885379	0.33822578	0.901705506	-0.643459197
[14,]	1.57838254	-2.25026454	1.13137368	0.600067489	-0.093104677
[15,]	-0.86885379	0.33822578	0.90170551	-0.643459197	-0.178567537
[16,]	-2.25026454	1.13137368	0.60006749	-0.093104677	-0.016820413
[17,]	0.33822578	0.90170551	-0.64345920	-0.178567537	-0.003654676
[18,]	1.13137368	0.60006749	-0.09310468	-0.016820413	0.340173885
[19,]	0.90170551	-0.64345920	-0.17856754	-0.003654676	0.099526845
[20,]	0.60006749	-0.09310468	-0.01682041	0.340173885	0.123251392

Response = 6

[1,]	0.356138940
[2,]	0.429908638
[3,]	0.793837999
[4,]	1.578382542
[5,]	-0.868853794
[6,]	-2.250264535
[7,]	0.338225776
[8,]	1.131373682
[9,]	0.901705506
[10,]	0.600067489
[11,]	-0.643459197
[12,]	-0.093104677
[13,]	-0.178567537
[14,]	-0.016820413
[15,]	-0.003654676
[16,]	0.340173885
[17,]	0.099526845
[18,]	0.123251392
[19,]	-0.129482672
[20,]	0.290835318

SGCV

[,1]	
[1,1]	0.1759273

\$lambda

[1]	0.004754449	0.015606600	0.016302906	0.008179820	0.014019204	0.017681506
-----	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

SR2

[1]	0.6819046
-----	-----------

SMSE

[1]	0.1198616
-----	-----------



## Lampiran 8.6. Output Program R untuk Fungsi Percobaan EP

### Orde polinomial m=2

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0:      6132599.8:  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000
```

### Lampiran 8. (Lanjutan)

```
1:      0.25832817:  0.0127577  0.0127578  0.0127579  0.0127577  0.0127576  0.0127578
2:      0.22442745:  0.00464736  0.0212541  0.0135487  0.00763199  0.00875372  0.0207106
3:      0.22378220:  0.00367547  0.0240198  0.0133397  0.00708028  0.00826913  0.0201620
4:      0.22324571:  0.00419456  0.0226412  0.0134963  0.00735240  0.00842041  0.0204415
5:      0.22324571:  0.00419456  0.0226412  0.0134963  0.00735240  0.00842042  0.0204415
6:      0.22324570:  0.00419456  0.0226412  0.0134963  0.00735240  0.00842042  0.0204415
7:      0.22324570:  0.00419456  0.0226412  0.0134963  0.00735240  0.00842042  0.0204415
```

### Orde polinomial m=3

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
```

```
0:      141210.65:  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000
1:      0.13926569:  0.0127521  0.0127639  0.0127618  0.0127501  0.0127621  0.0127565
2:      0.13704057:  0.0120767  0.0161884  0.0120165  0.0129672  0.0116092  0.0116873
3:      0.13641307:  0.0115980  0.0179013  0.0117079  0.0130795  0.0110426  0.0112153
4:      0.13618759:  0.0113582  0.0187575  0.0115534  0.0131365  0.0107597  0.0109789
5:      0.13618759:  0.0113582  0.0187575  0.0115534  0.0131365  0.0107597  0.0109789
6:      0.13618759:  0.0113582  0.0187575  0.0115534  0.0131365  0.0107597  0.0109789
7:      0.13618759:  0.0113582  0.0187575  0.0115534  0.0131365  0.0107597  0.0109789
8:      0.13618759:  0.0113582  0.0187575  0.0115534  0.0131365  0.0107597  0.0109789
```

### Orde polinomial m=4

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
```

```
0:      2914459.1:  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000
1:      0.13779024:  0.0127575  0.0127580  0.0127580  0.0127574  0.0127579  0.0127577
2:      0.13291629:  0.0108674  0.0152131  0.0136480  0.0116100  0.0112806  0.0139273
3:      0.13138580:  0.0105023  0.0159157  0.0143355  0.0111768  0.0103696  0.0142465
4:      0.12989705:  0.0101159  0.0166017  0.0150428  0.0107632  0.00949295  0.0145298
5:      0.12933248:  0.0100564  0.0171198  0.0151607  0.0108061  0.00901659  0.0143868
6:      0.12901317:  0.00998547  0.0173295  0.0152082  0.0109153  0.00875288  0.0143550
7:      0.12897400:  0.00997672  0.0173551  0.0152139  0.0109291  0.00872088  0.0143506
8:      0.12896910:  0.00997562  0.0173583  0.0152146  0.0109308  0.00871688  0.0143501
9:      0.12896850:  0.00997549  0.0173587  0.0152147  0.0109310  0.00871638  0.0143500
10:      0.12896847:  0.00997549  0.0173587  0.0152147  0.0109310  0.00871638  0.0143500
11:      0.12896847:  0.00997549  0.0173587  0.0152147  0.0109310  0.00871638  0.0143500
```

### Orde polinomial m=5

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
```

```
0:      20912496.:  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000
1:      0.13767213:  0.0127577  0.0127578  0.0127578  0.0127577  0.0127578  0.0127578
2:      0.13281287:  0.0107539  0.0150661  0.0139153  0.0114778  0.0114583  0.0138752
3:      0.12688899:  0.00795804  0.0182855  0.0155303  0.00969198  0.00964510  0.0154356
4:      0.12534536:  0.00725996  0.0190893  0.0159336  0.00924610  0.00919236  0.0158252
5:      0.12529626:  0.00723832  0.0191142  0.0159461  0.00923228  0.00917833  0.0158373
6:      0.12529364:  0.00723625  0.0191185  0.0159463  0.00923370  0.00917930  0.0158356
7:      0.12529364:  0.00723625  0.0191184  0.0159463  0.00923370  0.00917930  0.0158356
8:      0.12529364:  0.00723625  0.0191184  0.0159463  0.00923370  0.00917930  0.0158356
9:      0.12529364:  0.00723625  0.0191184  0.0159463  0.00923370  0.00917930  0.0158356
10:      0.12529364:  0.00723625  0.0191184  0.0159463  0.00923370  0.00917930  0.0158356
11:      0.12529364:  0.00723625  0.0191184  0.0159463  0.00923370  0.00917930  0.0158356
```

### Output m=5

```
$d
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] -2.097085 -5.520505 -1.041241 5.1909887 -3.0909658
[2,] 5.337016 -3.438025 -2.054068 -5.2452505 -0.9386534
[3,] -5.520505 -1.041241 5.190989 -3.0909658 -1.1332204
[4,] -3.438025 -2.054068 -5.245251 -0.9386534 3.1258076
[5,] -1.041241 5.190989 -3.090966 -1.1332204 -3.4053055
Response 6
[1,] -1.1332204
[2,] 3.1258076
[3,] -3.4053055
[4,] -2.0932395
[5,] -0.6364967
```



## Lampiran 8.6. (Lanjutan)

```

Sc
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] 0.71113117 -0.10472235 0.26715043 -0.89789956 0.34519817
[2,] 0.58788449 -0.21518603 0.33420086 0.03994115 0.19036379
[3,] -0.10472235 0.26715043 -0.89789956 0.34519817 0.06233884
[4,] -0.21518603 0.33420086 0.03994115 0.19036379 -0.05186553
[5,] 0.26715043 -0.89789956 0.34519817 0.06233884 -0.12133961
[6,] 0.33420086 0.03994115 0.19036379 -0.05186553 -0.14584361
[7,] -0.89789956 0.34519817 0.06233884 -0.12133961 -0.13326026
[8,] 0.03994115 0.19036379 -0.05186553 -0.14584361 -0.23279868
[9,] 0.34519817 0.06233884 -0.12133961 -0.13326026 -1.17396200
[10,] 0.19036379 -0.05186553 -0.14584361 -0.23279868 0.29462501
[11,] 0.06233884 -0.12133961 -0.13326026 -1.17396200 0.06386840
[12,] -0.05186553 -0.14584361 -0.23279868 0.29462501 0.18018790
[13,] -0.12133961 -0.13326026 -1.17396200 0.06386840 1.28249754
[14,] -0.14584361 -0.23279868 0.29462501 0.18018790 -0.34512615
[15,] -0.13326026 -1.17396200 0.06386840 1.28249754 0.26176250
[16,] -0.23279868 0.29462501 0.18018790 -0.34512615 0.12216849
[17,] -1.17396200 0.06386840 1.28249754 0.26176250 0.21741028
[18,] 0.29462501 0.18018790 -0.34512615 0.12216849 0.03639319
[19,] 0.06386840 1.28249754 0.26176250 0.21741028 0.19718531
[20,] 0.18018790 -0.34512615 0.12216849 0.03639319 0.20461384

Response 6
[1,] 0.06233884
[2,] -0.05186553
[3,] -0.12133961
[4,] -0.14584361
[5,] -0.13326026
[6,] -0.23279868
[7,] -1.17396200
[8,] 0.29462501
[9,] 0.06386840
[10,] 0.18018790
[11,] 1.28249754
[12,] -0.34512615
[13,] 0.26176250
[14,] 0.12216849
[15,] 0.21741028
[16,] 0.03639319
[17,] 0.19718531
[18,] 0.20461384
[19,] 0.24214478
[20,] -0.65809822

SGCV
[1,] 0.1252936

Slambda
[1] 0.007236248 0.019118448 0.015946322 0.009233703 0.009179299 0.015835627

SR2
[1] 0.9077383

SMSE
[1] 0.09114923

```



## Lampiran 8.7. Output Program R untuk Fungsi Percobaan TP

### Orde polinomial m=2

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 7819632.3: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.60902872: 0.0127578 0.0127579 0.0127578 0.0127578 0.0127574 0.0127578
2: 0.57822249: 0.0136905 0.0136221 0.0133642 0.00925647 0.0128526 0.0137607
3: 0.56985980: 0.0146904 0.0140780 0.0140988 0.00622896 0.0127461 0.0147043
4: 0.56985980: 0.0146904 0.0140780 0.0140988 0.00622896 0.0127461 0.0147043
5: 0.56985980: 0.0146904 0.0140780 0.0140988 0.00622896 0.0127461 0.0147043
```

### Orde polinomial m=3

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 69256.381: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.48051825: 0.0127540 0.0127727 0.0127552 0.0127548 0.0127602 0.0127496
2: 0.47756979: 0.0113594 0.0145850 0.0117412 0.0119419 0.0153801 0.0115346
3: 0.47643589: 0.0110297 0.0156125 0.0115516 0.0112645 0.0164984 0.0105833
4: 0.47624623: 0.0109456 0.0158486 0.0115163 0.0111162 0.0167599 0.0103529
5: 0.47613808: 0.0109407 0.0159457 0.0114866 0.0110242 0.0169115 0.0102524
6: 0.47612808: 0.0109378 0.0159582 0.0114839 0.0110145 0.0169298 0.0102378
7: 0.47612127: 0.0109381 0.0159658 0.0114877 0.0110089 0.0169348 0.0102292
8: 0.47611886: 0.0109381 0.0159697 0.0114893 0.0110063 0.0169375 0.0102249
9: 0.47611753: 0.0109376 0.0159695 0.0114894 0.0110060 0.0169378 0.0102243
10: 0.47611750: 0.0109377 0.0159695 0.0114894 0.0110060 0.0169378 0.0102243
11: 0.47611750: 0.0109377 0.0159695 0.0114894 0.0110060 0.0169378 0.0102243
```

### Orde polinomial m=4

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 1672065.3: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.48261643: 0.0127576 0.0127584 0.0127578 0.0127574 0.0127578 0.0127576
2: 0.47183234: 0.0118215 0.0138378 0.0140884 0.00959789 0.0134524 0.0137484
3: 0.47163571: 0.0118029 0.0138733 0.0141319 0.00951131 0.0134634 0.0137635
4: 0.47145252: 0.0117915 0.0138783 0.0141943 0.00942806 0.0134761 0.0137782
5: 0.47111673: 0.0117680 0.0138883 0.0143193 0.00926188 0.0135017 0.0138072
6: 0.47096584: 0.0117563 0.0138933 0.0143818 0.00917878 0.0135145 0.0138218
7: 0.47090518: 0.0117613 0.0138941 0.0144062 0.00913299 0.0135222 0.0138297
8: 0.47087619: 0.0117637 0.0138945 0.0144184 0.00911011 0.0135263 0.0138335
9: 0.47087099: 0.0117561 0.0138948 0.0144173 0.00911225 0.0135306 0.0138238
10: 0.47087099: 0.0117561 0.0138948 0.0144173 0.00911225 0.0135306 0.0138238
11: 0.47087099: 0.0117561 0.0138948 0.0144173 0.00911225 0.0135306 0.0138238
12: 0.47087099: 0.0117561 0.0138948 0.0144173 0.00911225 0.0135306 0.0138238
13: 0.47087099: 0.0117561 0.0138948 0.0144173 0.00911225 0.0135306 0.0138238
```

### Orde polinomial m=5

```
> opt.nlm<-nlminb(start=st,GCV,control=list(trace=1,iter.max=100,rel.tol=1e-5),lower=bawah,upper=atas)
0: 12653855.: 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
1: 0.48294186: 0.0127577 0.0127578 0.0127578 0.0127577 0.0127578 0.0127577
2: 0.47260816: 0.0122953 0.0139573 0.0139755 0.00941752 0.0133919 0.0135090
3: 0.47162941: 0.0121868 0.0142703 0.0142999 0.00855013 0.0135486 0.0136907
4: 0.47162909: 0.0121850 0.0142768 0.0143056 0.00853323 0.0135515 0.0136943
5: 0.47162909: 0.0121850 0.0142768 0.0143056 0.00853316 0.0135516 0.0136943
6: 0.47162909: 0.0121850 0.0142768 0.0143056 0.00853316 0.0135516 0.0136943
7: 0.47162909: 0.0121850 0.0142768 0.0143056 0.00853316 0.0135516 0.0136943
```

### Output m=4

```
$d
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] -1.205351 -4.624145 -1.447266 -5.9262439 -0.7003003
[2,] 3.254211 -2.798782 4.389736 -3.3601391 2.4699622
[3,] -4.624145 -1.447266 -5.926244 -0.7003003 -3.6468910
[4,] -2.798782 4.389736 -3.360139 2.4699622 -2.1316573
Response 6
[1,] -3.646891
[2,] -2.131657
[3,] -1.405223
[4,] 4.425817

$e
Response 1 Response 2 Response 3 Response 4 Response 5
[1,] 0.1418863726 0.2816248916 0.0003735909 -0.71365293 0.15232826
[2,] 1.1039622525 -0.0190990502 -0.2668678975 -0.05464329 0.15609319
[3,] 0.2816248916 0.0003735909 -0.7136529295 0.15232826 0.17759923
[4,] -0.0190990502 -0.2668678975 -0.0546432949 0.15609319 0.07999686
```



### Lampiran 8.7. (Lanjutan)

```

[5,] 0.0003735909 -0.7136529295 0.1523282575 0.17759923 -0.05765759
[6,] -0.2668678975 -0.0546432949 0.1560931907 0.07999686 -0.16450422
[7,] -0.7136529295 0.1523282575 0.1775992330 -0.05765759 0.01492219
[8,] -0.0546432949 0.1560931907 0.0799968627 -0.16450422 -0.10767428
[9,] 0.1523282575 0.1775992330 -0.0576575901 0.01492219 -1.03388190
[10,] 0.1560931907 0.0799968627 -0.1645042160 -0.10767428 0.24301053
[11,] 0.1775992330 -0.0576575901 0.0149221947 -1.03388190 -0.38772796
[12,] 0.0799968627 -0.1645042160 -0.1076742840 0.24301053 0.45392996
[13,] -0.0576575901 0.0149221947 -1.0338819035 -0.38772796 1.37717418
[14,] -0.1645042160 -0.1076742840 0.2430105336 0.45392996 -0.70039619
[15,] 0.0149221947 -1.0338819035 -0.3877279621 1.37717418 1.00566268
[16,] -0.1076742840 0.2430105336 0.4539299551 -0.70039619 1.07493524
[17,] -1.0338819035 -0.3877279621 1.3771741830 1.00566268 1.66240050
[18,] 0.2430105336 0.4539299551 -0.7003961898 1.07493524 0.80317179
[19,] -0.3877279621 1.3771741830 1.0056626831 1.66240050 1.08285301
[20,] 0.4539299551 -0.7003961898 1.0749352444 0.80317179 0.66518345

Response 6
[1,] -0.17759923
[2,] 0.07999686
[3,] -0.05765759
[4,] -0.16450422
[5,] 0.01492219
[6,] -0.10767428
[7,] -1.03388190
[8,] 0.24301053
[9,] -0.38772796
[10,] 0.45392996
[11,] 1.37717418
[12,] -0.70039619
[13,] 1.00566268
[14,] 1.07493524
[15,] 1.66240050
[16,] 0.80317179
[17,] 1.08285301
[18,] 0.66518345
[19,] 0.01205995
[20,] -2.28637887

SGCV
[1,]
[1,] 0.470871

$lambda
[1] 0.011756057 0.013894754 0.014417330 0.009112248 0.013530624 0.013823789

SR2
[1] 0.6099912

$MSE
[1] 0.3425166

```



## Lampiran 9. Prosedur nlminb untuk meminimumkan GCV

nlminb {stats}

R Documentation

Optimization using PORT routines

### Description

Unconstrained and box-constrained optimization using PORT routines.  
For historical compatibility.

### Usage

```
nlminb(start, objective, gradient = NULL, hessian = NULL, ...,  
       scale = 1, control = list(), lower = -Inf, upper = Inf)
```

### Arguments

**start** numeric vector, initial values for the parameters to be optimized.

**objective** Function to be minimized. Must return a scalar value. The first argument to **objective** is the vector of parameters to be optimized, whose initial values are supplied through **start**. Further arguments (fixed during the course of the optimization) to **objective** may be specified as well (see ...).

**gradient** Optional function that takes the same arguments as **objective** and evaluates the gradient of **objective** at its first argument. Must return a vector as long as **start**.

**hessian** Optional function that takes the same arguments as **objective** and evaluates the hessian of **objective** at its first argument. Must return a square matrix of order `length(start)`. Only the lower triangle is used.

**...** Further arguments to be supplied to **objective**.

**scale** See PORT documentation (or leave alone).

**control** A list of control parameters. See below for details.

**lower,** vectors of lower and upper bounds, replicated to be as long  
**upper** as **start**. If unspecified, all parameters are assumed to be unconstrained.

### Details

Any names of **start** are passed on to **objective** and where applicable, **gradient** and **hessian**. The parameter vector will be coerced to double.

The PORT documentation is at <http://netlib.bell-labs.com/cm/cs/ctr/153.pdf>.

The parameter vector passed to **objective**, **gradient** and **hessian** had special semantics prior to R 3.1.0 and was shared between calls. The functions should not copy it.

If any of the functions returns NA or NaN the internal code could infinite-loop in R prior to 2.15.2: this is now an error for the gradient and Hessian, and such values for function evaluation are replaced by +Inf with a warning.

### Value

A list with components:

**par** The best set of parameters found.

**objective** The value of **objective** corresponding to **par**.

**convergence** An integer code. 0 indicates successful convergence.

**message** A character string giving any additional information returned by the optimizer, or NULL. For details, see PORT documentation.

**iterations** Number of iterations performed.

**evaluations** Number of objective function and gradient function evaluations

### Control parameters

Possible names in the control list and their default values are:

**eval.max**

Maximum number of evaluations of the objective function allowed.  
Defaults to 200.

**iter.max**

Maximum number of iterations allowed. Defaults to 150.



## Lampiran 9. (Lanjutan)

`trace` The value of the objective function and the parameters is printed every `trace`'th iteration. Defaults to 0 which indicates no trace information is to be printed.

`abs.tol` Absolute tolerance. Defaults to 0 so the absolute convergence test is not used. If the objective function is known to be non-negative, the previous default of  $1e-20$  would be more appropriate.

`rel.tol` Relative tolerance. Defaults to  $1e-10$ .

`x.tol` X tolerance. Defaults to  $1.5e-8$ .

`xf.tol` false convergence tolerance. Defaults to  $2.2e-14$ .

`step.min, step.max` Minimum and maximum step size. Both default to 1.

`sing.tol` singular convergence tolerance; defaults to `rel.tol`.

`scale.init` ...

`diff.g` an estimated bound on the relative error in the objective function value.

```
Aplikasi:
# Fungsi GCV
GCV=(1/(kr*n))*((t(y)%*t(IA)%*%IA%*%y))/((1/(kr*n))*sum(diag(IA)))^2)
return(GCV)
}

awal=NULL
bawah=NULL
atas=NULL
for (j in 1:kr)
{
  awal=c(awal,0)
  bawah=c(bawah,0)
  atas=c(atas,Inf)
}

# Penggunaan Prosedur inminb
opt.lambda=nlminb(start=awal,GCV,control=list(trace=1,iter.max=1000,rel.tol=1e-6),lower=bawah,upper=atas)
lambda=opt.lambda$par
GCV.min=GCV(lambda,opt)
```



## Daftar Riwayat Hidup

### A. Data Pribadi



Nama : Adji Achmad Rinaldo Fernandes  
NRP : 1311301001  
Jenis Kelamin : Laki-laki  
Tempat, Tgl. lahir : Samarinda, 8 September 1981  
Alamat : Permata Jingga Pinus No 2 Malang  
Instansi : PS Statistika, Jurusan Matematika,  
Universitas Brawijaya  
NIP : 198109082005011002  
Tgl. Masuk S3 : 5 September 2011  
Tgl. Kualifikasi : 30 Agustus 2013

### B. Riwayat Pendidikan

No	Nama Pendidikan	Jurusan/Bidang	Tahun Lulus
1	SD Negeri 5 Balikpapan Selatan	-	1994
2	SMP Negeri 2 Balikpapan	-	1997
3	SMA Negeri 1 Balikpapan	IPA	2000
4	Sarjana S1 (S.Si) Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya Malang	Matematika/ Statistika	2004
5	Master of Science S2 (M.Sc) School of Information and Technology, Hasselt University, Diepenbeek, Belgium	Statistics	2007
6	Doktor Ilmu Statistika S3 (Dr) Jurusan Statistika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya	Statistika	-

### C. Riwayat Publikasi

#### Jurnal :

- Fernandes, A.A.R, Budiantara, I.N, Otok, B.W., and Suhartono. 2014. *Spline estimator for bi-responses nonparametric regression model for longitudinal data*. **Applied Mathematical Sciences**, Vol. 8, no. 114, 2014, 5653-5665. <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2014.47566>.
- Fernandes, A.A.R, Budiantara, I.N, Otok, B.W., and Suhartono. 2014. *Reproducing Kernel Hilbert Space for Penalized Regression multi-predictors: case in longitudinal data*. **International Journal of Mathematical Analysis**, Vol. 8, no. 40, 2014, 1951-1961. <http://dx.doi.org/10.12988/ijma.2014.47212>.



- Fernandes, A.A.R, Budiantara, I.N, Otok, B.W., and Suhartono. 2014. *Reproducing Kernel Hilbert Space and Penalized Weighted Least Square in Nonparametric Regression*, **Applied Mathematical Science** Vol 8, 2014, No 146, pp. 7289-7300. <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2014.49759>.
- Fernandes, A.A.R, Budiantara, I.N, Otok, B.W., and Suhartono. 2015. *Spline Estimator for Bi-Responses and Multi-Predictors Nonparametric Regression Model in Case of Longitudinal Data*, **Journal of Mathematics and Statistics**, Vol 11, No 2, 2015, pp. 61-69. <http://dx.doi.org/10.3844/jmssp.2015.61.69>

#### **Seminar Internasional :**

1. Fernandes, A.A.R, Budiantara, I.N, Otok, B.W., and Suhartono. 2012. *Application of Multi-Response Longitudinal Data Using Linear Mixed Model*. **International Conference On Applied & Engineering Mathematics**, May 2012, Penang, Malaysia
2. Fernandes, A.A.R, Budiantara, I.N, Otok, B.W., and Suhartono. 2014. *Generalized Penalized Spline Nonparametric Regression Approach in Biresponse Longitudinal*. **International Conference on Mathematics, Engineering and Industrial Application**. May 2014, Penang, Malaysia.
3. Fernandes, A.A.R, Budiantara, I.N, Otok, B.W., and Suhartono. 2014. *Reproducing Kernel Hilbert Space for Spline Estimator of Nonparametric Regression Using Longitudinal Data*. **International Symposium on Biomathematics**, September 2014, University of Brawijaya, Malang.
4. Fernandes, A.A.R, Budiantara, I.N, Otok, B.W., and Suhartono. 2014. *Reproducing Kernel Hilbert Space for Spline Estimator in Multiresponse*. **International Conference on Statistics and Mathematics**. November 2014. Sepuluh Nopember Institute of Technology, Surabaya.



## DAFTAR PUSTAKA

- Anonimos. (2014). *Global Tuberculosis Report 2014*, World Health Organization (WHO). Retrieved, September, 8, 2015. Website: [http://www.who.int/tb/publications/global\\_report/en/](http://www.who.int/tb/publications/global_report/en/)
- Antoniadis, A., and Sapatinas, T. (2007). Estimation and Inference in Functional Mixed-Effects Models. *Computational Statistics and Data*, **51**(1), 4793-4813.
- Antoniadis, A., Gregoire, G., and McKeague, I.W. (1994). Wavelet Methods for Curve Estimation, *Journal of American Statistical Association*, **89**(2), 1340-1353.
- Astuti. (2008). *Profil Kadar Soluble Urokinase Plasminogen Activator Receptor (suPAR) Pada Serum Penderita Tuberkulosis Paru (Sebagai Monitoring Terapi)*. Universitas Brawijaya. Malang.
- Aydin, D. (2007). Comparison of regression model based on nonparametric estimation techniques: Prediction of GDP in Turkey, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, ISSN:1790-031X, Issue 2, Vol. 1, 70-75.
- Barnes, FP., and Wize B. (2000). Type 1 Cytokine and The Pathogenesis of Tuberculosis. *American Journal Respiratory Critical Care Medicine*, **161**(6), 1773-1774.
- Berberian, K.S. (1961). *Introduction to Hilbert Space*. New York: John Wiley and Sons.
- Budiantara, I.N. (2000). *Estimator Spline Dalam Regresi Nonparametrik dan Semiparametrik*. Disertasi Universitas Gadjah Mada Yogyakarta.
- Budiantara, I.N., Lestari, B., dan Islamiyati, A. (2009). *Estimator Spline Terbobot Spline Parsial Terbobot dalam Regresi Nonparametrik dan Semi parametrik Heteroskedastik untuk Data Longitudinal*. Laporan Akhir Program Hibah Kompetensi Tahun 1. Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
- Budiantara, I.N., Subanar, and Soejoeti, Z. (1997). Weighted Spline Estimator. *Bulletin of the International Statistical Institute*, **51**(1), 333-334.
- Chamidah, N., Budiantara, I.N., Sunaryo, S., and Zain, I. (2012). Designing of child growth chart based on multi-response local polynomial modeling. *Journal of Mathematics and Statistics*, **8**(3), 342-350.



Chen, H., and Wang, Y. (2011). A Penalized Spline Approach to Functional Mixed Effects Model Analysis. *Biometrics*, **67**(1), 861-870

Chozin, I.N. (2012). *Studi Prospektif : Kadar Soluble Urokinase Plasminogen Activator Receptor (Supar) Selama Terapi OAT Penderita Tuberkulosis Paru*. Laporan Penelitian DPP SPP. Fakultas Kedokteran. Universitas Brawijaya Malang.

Cox, D.D. (1983). Asymptotic for M-type Smoothing Spline. *The Annals of Statistics*, **11**(32), 530-551.

Crainiceanu, C.M., Ruppert, D., and Wand, M.P. (2004). Bayesian Analysis for Penalized Spline Regression Using WinBugs. *Journal of Statistical Software*, **14**(14), 6-14.

Craven, P. and Wahba, G. (1979). Smoothing Noisy Data With Spline Function: Estimating the Correct Degree of Smoothing by the Method of Generalized Cross Validation. *Numerical Mathematics*, **31**(1), 377-403.

Diggle, P.J., Liang, Y.K. and Zeger, S.L., (2006), *Analysis of Longitudinal Data*. Second Edition. New York: Oxford.

Eubank, R.L. (1999). *Nonparametric Regression and Spline Smoothing*. Second Edition. New York: Marcel Dekker, Inc.

Fan, J. and Gijbels, I. (1997). *Local Polynomial Modelling and Its Applications*. New York: Chapman and Hall.

Ghosh, P., and Hanson, T. (2014). A Semiparametric Bayesian Approach to Multivariate Longitudinal Data. *Australian N Z J Stat*, **52**(3), 275-288.

Greene, W.H. (2007). *Econometric Analysis*. Sixth Edition. Prentice Hall. New Jersey.

Gujarati, D. (1995). *Ekonometrika Dasar*. Terjemahan: Zain, S. Jakarta: Erlangga.

Guo, W. (2002). Functional Mixed Effects Models. *Biometrics*, **58**(1), 121-128.

Hardle, W. (1990), *Applied Nonparametric Regression*. New York: Cambridge University Press

Heckman, N., Lockhart R., and Nielsen J.D. (2009). *Penalized Regression, Mixed Effects Models and Appropriate Modelling*. Retrieved, December, 12, 2012. Website: <http://www.stat.ubc.ca/~nancy/pubs/lmetechreport.pdf>.

Hoover, D.R., Rice, J.A., Wu, C.O, and Yang, L.P. (1998). Nonparametric Smoothing Estimates of Time-varying Coefficient Models with Longitudinal Data. *Biometrika*, **85**(1), 809-822.



Howell, J.R. (2007). *Analysis Using Smoothing Splines As Implemented In LME()* In R. Thesis. Brigham Young University.

Huang, Z. (2003). Local Asymptotics for Polynomial Spline Regression. *The Annals of Statistics*, **31**(5), 1600-1635.

Johnson, R.A., and Wichern, D.W. (1982). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. New York: Prentice Hall

Kim, Y.J., and Gu, C. (2004). Smoothing Spline Gaussian Regression: More Scalable Computation via Efficient Approximation. *Royal Statistical Society: Series B*, **66**(2), 337-356.

Kimeldorf, G., and Wahba, G. (1971). Some Results on Tchebycheffian Spline Functions. *Mathematical Analysis and Applications* **33**(1), 82-95.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley and Sons.

Kubokawa, T., and Srivastava, M.S. (2003). Prediction in Multivariate Mixed Linear Models. *Japan Statistical Society*, **33**(2), 245-270.

Kutner, M.H., Nachtsheim, C.J., Neter, J. and Li W. (2005). *Applied Linear Statistical Models*. Fifth Edition. Boston: McGraw-Hill International.

Lee, T.C.M. (2004). Improved Smoothing Spline Regression by Combining Estimates of Different Smoothness. *Statistics and Probability Letters*, **67**(1), 133-140.

Lestari, B., Budiantara, I.N., Sunaryo, S., and Mashuri M. (2010). Spline Estimator in Multiresponse Nonparametric Regression Model with Unequal Correlation of Errors. *Journal of Mathematics and Statistics*, **6**(3): 327-332.

Liang, H. (2006). Estimation in partially linear models and numerical comparisons. *Computation Statistics and Data Analysis*, Vol 50, 675-687.

Liang, H., Wu, H., and Carroll, R. (2003). The Relationship between Virologic and Immunologic Responses in AIDS Clinical Research Using Mixed-Effects Varying-Coefficient Models with Measurement Error. *Biostatistics*, **4**(2), 297-312.

Liang, K.Y., and Zeger, S.L. (1986). Longitudinal Data Analysis Using Generalized Linear Models. *Biometrika*, **73**(1), 13-22.



Lin, X., Wang, N., Welsh A.H., and Carrol R. (2006). Equivalent Kernels of Smoothing Splines in Nonparametric Regression for Clustered/Longitudinal Data. *Biometrika*, **91**(1), 177-193.

Malliavin, P., and Mancino, M.E. (2009). A Fourier Transform Method for Non-parametric Estimation of Multivariate Volatility. *The Annals of Statistics*, **37**(4), 1983-(2010).

Matias, J.M. (2005). *Multiresponse Nonparametric Regression*. Retrieve Nopember, 20, 2012. Website: [www.organcongres.com/eventos/\(2005\)/isni/program/012.pdf](http://www.organcongres.com/eventos/(2005)/isni/program/012.pdf).

Minji, J., Keena, T., Lihua, W., and Steven, G. (2003). Soluble Urokinase-type Plasminogen Activator Receptor Inhibits Cancer Cell Growth and Invasion by Direct Urokinase-Independent Effects on Cell Signaling. *Journal of Biological Chemistry*, **278**(47), 46692-46698.

Oehlert, G.W. (1992). Relaxed Boundary Smoothing Spline, *The Annals of Statistics*, **20**(1), 146-160.

Oelsen, E., Gustafson, J., Sidenius, N., Fischer, T., Parner J. Aaby P., Gomes, V., and Lisse, I. (2002). The Serum Level of Soluble Urokinase Receptor is Elevated in Tuberculosis Patients and Predicts Mortality during Treatment: A Community Study from Guinea-Bissau. *International Journal of Tuberculosis Lung Diseases*, **6**(8), 686-692.

Perhimpunan Dokter Paru Indonesia (PDPI). (2006). *Tuberkulosis : Pedoman Diagnosis dan Penatalaksanaan di Indonesia*. Indah Offset Citra Grafika, Jakarta.

Rom, W.N, and Garay S.M. (2004). *Tuberculosis*. Second Edition. Philadelphia: Lippincot Williams and Wilkins.

Speckman, P. (1980). *Minimax Estimation of Linear Functions in a Hilbert Space*. Unpublished Manuscript.

Verbeke, G., Fiews, S., Molenberghs, G., and Davidian, M. (2014). The Analysis of Multivariate Longitudinal Data: A Review. *Statistical Methods in Medical Research*, **23**(1), 42-59.

Verbeke, G., and Molenberghs, G. (2000). *Linear Mixed Model for Longitudinal Data*. Springer Series in statistics. New York: Springer Verlag.

Verotta, D. (1993). *Longitudinal Splines*. San Francisco: University of California Press.

Wahba, G. (1990). *Spline Models for Observational Data*. Pennsylvania: SIAM





Wang, J.L. (2003). *Nonparametric Regression Analysis of Longitudinal Data*. California: University of California Press.

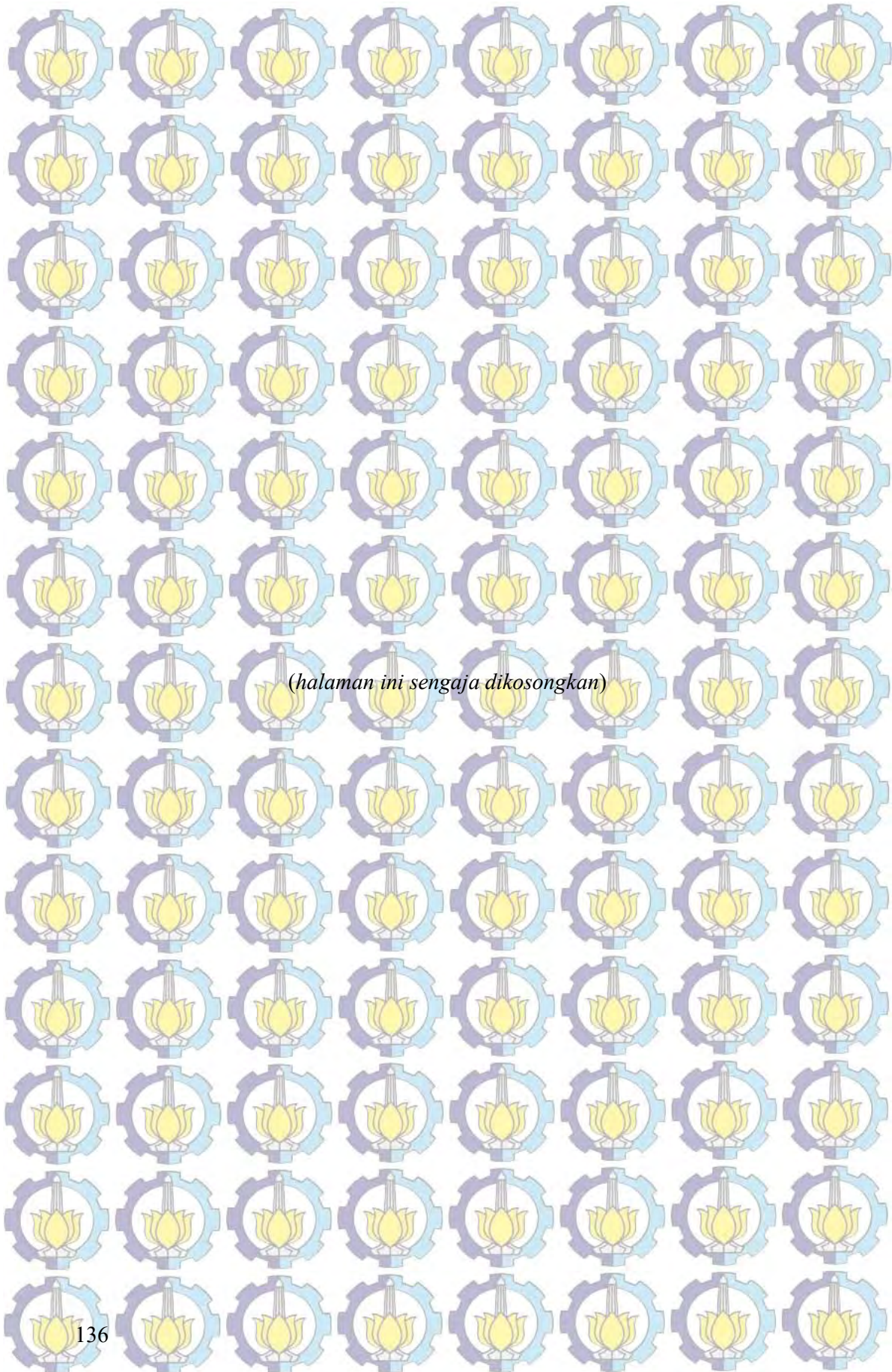
Wang, Y., Guo, W., and Brown, M.B. (2000). Spline Smoothing for Bivariate Data With Application to Association Between Hormones. *Statistica Sinica*, **10**(1), 377-397.

Weiss, R.E. (2005). *Modelling Longitudinal Data*. Springer Texts in Statistic New York. Retrieved, January, 31, 2012. Website: <http://www.biostat.ucla.edu/books/mld>.

Wu, H., and Zhang, J.T. (2006). *Nonparametric Regression Methods for Longitudinal Data Analysis*. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc.

Xiang, D., Qiu, P., and Pu, X. (2013). Nonparametric Regression Analysis of Multivariate Longitudinal Data. *Statistica Sinica* **23**(1), 769-789.







## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1.	Matriks Varians-Kovarians Random Error .....	137
Lampiran 2.1.	Implementasi <i>Spline</i> dalam Regresi Linier Sederhana .....	142
Lampiran 2.2.	Implementasi <i>Spline</i> untuk Data Longitudinal .....	149
Lampiran 2.3.	Penggunaan Matriks $V_{11}$ untuk Data Longitudinal .....	154
Lampiran 2.4.	Contoh Matriks $T$ dan $V$ .....	160
Lampiran 3.	Jumlah Penderita Baru TB Paru per 100.000 Penduduk.....	162
Lampiran 4.	Teorema yang berkaitan dengan Estimasi $\hat{\Sigma}$ .....	163
Lampiran 5.1.	Data Riil Aplikasi Penderita TB Paru.....	165
Lampiran 5.2.	<i>Syntax</i> Program R Aplikasi Data Penderita TB Paru.....	167
Lampiran 5.3.	Output R Estimasi Parameter Aplikasi Penderita TB Paru....	171
Lampiran 5.4.	Analisis Deskriptif Aplikasi Data Penderita TB Paru.....	174
Lampiran 5.5	Uji Korelasi Antar Tiap Subyek .....	175
Lampiran 5.6.	Uji Autokorelasi Aplikasi Data Penderita TB Paru.....	176
Lampiran 5.7.	Uji Linieritas Data Penderita TB Paru .....	177
Lampiran 5.8.	<i>Spline</i> dengan Bobot tidak mempertimbangkan Korelasi.....	178
Lampiran 5.9.	Perbandingan Hasil Estimasi pada Model Regresi Nonparametrik <i>Spline</i> Menggunakan Bobot dengan dan tanpa Korelasi .....	179
Lampiran 5.10.	Estimator <i>Spline</i> $x_2$ terhadap $y_1$ dan $y_2$ pada data TB Paru.....	180
Lampiran 5.11.	Estimator <i>Spline</i> $x_3$ terhadap $y_1$ dan $y_2$ pada data TB Paru.....	181
Lampiran 5.12.	Estimator <i>Spline</i> $x_1 x_3$ terhadap $y_1$ dan $y_2$ pada data TB Paru.	182
Lampiran 5.13.	Estimator <i>Spline</i> $x_2 x_3$ terhadap $y_1$ dan $y_2$ pada data TB Paru.	183
Lampiran 5.14.	Model Akhir Pada Aplikasi Penderita TB Paru .....	184
Lampiran 6.1.	Regresi Parametrik (LMM).....	190
Lampiran 6.2.	Estimasi Parameter Model Regresi Parametrik (LMM) .....	191



Lampiran 7.	Perbandingan Hasil Estimasi pada Model Regresi Parametrik dan Nonparametrik .....	192
Lampiran 8.1.	Syntax Program R untuk Data Bangkitan .....	193
Lampiran 8.2.	Output Program R untuk Fungsi Percobaan EE .....	196
Lampiran 8.3.	Output Program R untuk Fungsi Percobaan TT .....	198
Lampiran 8.4.	Output Program R untuk Fungsi Percobaan PP .....	200
Lampiran 8.5.	Output Program R untuk Fungsi Percobaan ET .....	202
Lampiran 8.6.	Output Program R untuk Fungsi Percobaan EP .....	204
Lampiran 8.7.	Output Program R untuk Fungsi Percobaan TP .....	206
Lampiran 9.	Prosedur nlminb untuk meminimumkan GCV .....	208
Lampiran 10.	Daftar Riwayat Hidup .....	21



## **Spline Estimator for Bi-responses Nonparametric Regression Model for Longitudinal Data**

**Adji Achmad Rinaldo Fernandes**

Department of Mathematics  
Faculty of Mathematics and Natural Sciences  
University of Brawijaya  
Jalan Veteran Malang-Indonesia

**I Nyoman Budiantara, Bambang Widjanarko Otok and Suhartono**

Department of Statistics  
Faculty of Mathematics and Natural Sciences  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Jalan Arif Rahman Hakim Surabaya-Indonesia

Copyright © 2014 Adji Achmad Rinaldo Fernandes, I Nyoman Budiantara, Bambang Widjanarko Otok and Suhartono. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

### **Abstract**

Regression analysis is a method used to determine the relationship between the predictor variables with the response variables. One of the uses of regression analysis is in the analysis of longitudinal data, and using bi-responses. Nonparametric regression approach is used when the shape of the curve regression is unknown, so we called the model of bi-responses nonparametric regression model for longitudinal data. The purposes of this study are to obtain the function form of the nonparametric bi-responses regression on longitudinal data, to obtain the spline estimator in estimating the nonparametric bi-responses regression curve on longitudinal data, and to apply the spline estimator in estimating the curve of nonparametric bi-responses regression on longitudinal data on simulated data. bi-responses nonparametric regression model on longitudinal data on the equation  $y_{kit} = f_{ki}(\cdot)x_{it} + \epsilon_{kit}$  has a function form  $f_{ki}(\cdot) = \sum_{d=1}^D \beta_{kd} \phi_d(\cdot)$ . Bi-responses nonparametric regression of the spline



estimator on longitudinal data which meet the criteria of minimizing Penalized Weighted Least Square (PWLS) is  $\hat{f} = A^* (A^* A^* + \lambda I)^{-1} y$ , with

$$A^* = T^T M W T^T M W^* \quad \text{and} \quad \lambda I = \lambda (T^T M W T^T M W^* + \lambda I) + V^T M W I$$

$$T^T M W T^T M W^* = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \lambda I = \lambda \begin{bmatrix} T^T M W^* & 0 \\ 0 & T^T M W^* \end{bmatrix}$$

The simulation results show that the spline estimator can be applied to the generation of data with  $m = 4$  (cubic spline) which gives the value of  $R^2$  of 94.63%.

**Keywords:** Spline, bi-responses, Longitudinal, PWLS

## 1 Introduction

Regression analysis is a method used to determine the relationship between the predictor variables with the response variables. One of the uses of regression analysis is in the analysis of longitudinal data, which is a combination of cross-section data and time-series, that is the observations which are made as many as  $r$  mutually independent subjects (cross-section) with each subject is repeatedly observed in  $n$  period of time (time-series) and between observations within the same subjects which are correlated [4].

In longitudinal data  $(x_{it}, y_{it})$ , the relationship between the predictor variables  $x_{it}$  with response variables  $y_{it}$  follows the regression model can be presented as follows:

$$y_{it} = f(x_{it}) + \epsilon_{it}, i = 1, 2, \dots, r; t = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

In the applications in various fields, problems involving more than one correlated response variables are often encountered, so the regression model developed is multi-response (for two response variables called bi-responses) as follows:

$$y_{kit} = f_{ki}(x_{kit}) + \epsilon_{kit}, k = 1, 2; i = 1, 2, \dots, r; t = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Equations (1) and (2) are the regression models for longitudinal data with predictor variable  $x$  as the observation time (*design time points*) [11], and  $f$  is the regression curve relationship between the predictor variables with the response variable  $y$  for to- $i$  subject. The curve  $f$  can be approached in three ways: parametric, nonparametric, or semi-parametric. The parametric regression approach is used when it is assumed that the shape of the curve  $f$  is known, while the nonparametric regression approach is used when the shape of the curve  $f$  is unknown. On the other hand, semi-parametric regression approach is used when it is assumed that the shape of the curve is partially known, and some others are unknown [5].



Nonparametric regression is a regression approach suitable for the data patterns of unknown shape, or there is not complete information about previous data patterns [2,5]. In nonparametric regression approach, the estimation model shape of the relationship pattern is determined based on the pattern of existing data. Some nonparametric regression approaches are: the *kernel* [6], *spline* [2,9], and *wavelets* [1]. Spline estimator is one of the most commonly used estimator in nonparametric regression because it has a good visual interpretation, high flexibility, and able to handle smooth function characters [2,5]. Regression curve  $f$  in spline nonparametric estimator for longitudinal data used is assumed smooth, meaning that it is contained in a certain function space, especially Sobolev space or as written [5].

Spline estimator in the bi-responses nonparametric regression model for longitudinal data is the generalization of the spline estimator in single-response nonparametric regression model for longitudinal data [3,8], as well as spline estimator in the multi-response nonparametric regression model for cross-section data [7,10]. Spline estimator in the bi-responses nonparametric regression model for longitudinal data is the generalization of the spline estimators in single-response nonparametric regression model for longitudinal data, as well as spline estimator in the multi-response nonparametric regression model for cross-section data. The spline estimator approach for longitudinal data can accommodate the correlation between observations within the same subject, which is not found in the cross-section data, so that the autocorrelation assumption problem can be resolved. On the other hand, with bi-responses approach, it will accommodate any correlation between each response variable.

Based on the above background, the purposes of this study are (1) to obtain the function form of the nonparametric bi-responses regression on longitudinal data, (2) to obtain the spline estimator in estimating the nonparametric bi-responses regression curve on longitudinal data, (3) to apply the spline estimator in estimating the curve of nonparametric bi-responses regression on longitudinal data on simulated data.

## 2 Methods and results

Bi-responses nonparametric regression model for longitudinal data which involves  $r$  subject on  $n$  observation in each subject is as follows:

$$y_{kit} \square f_{ki}(\cdot)x_{it} \square \square_{kit}, k = 1,2; i \square 1,2,\dots,r; t \square 1,2,\dots,n, \quad (3) \text{ with}$$

$y_{kit}$  :  $k$  response variable, of  $i$  subject, in  $t$  observation

$f_{ki}$  : regression curve corresponding to  $k$  response variable, of  $i$  subject  $\square_{kit}$  :

Error random variable from estimation results in  $k$  response and  $i$  subject

$\square_{kit}$  variable is an error random variable assumed to be normally distributed to N-variat ( $N = 2rn$ ), with zero mean and variance-covariance matrix  $\mathbf{W}^{-1}$  is follows:



$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1r} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{r1} & \sigma_{r2} & \cdots & \sigma_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & W = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1r} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{r1} & \sigma_{r2} & \cdots & \sigma_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (4)$$

The spline approach generally defines  $f_{ki}$  in equation (3) in form of an unknown regression curve, but  $f_{ki}$  is only assumed as smooth, in a sense of being contained in a specified function space, especially Sobolev space or written as  $f_{ki} \in W_2^m[a_{ki}, b_{ki}]$ ;  $k = 1, 2$ ;  $i = 1, 2, \dots, r$ , with:

$$W_2^m[a_{ki}, b_{ki}] = \{f_{ki} : \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} [f_{ki}^{(m)}(x)]^2 dx < \infty\}, \quad (5)$$

for a positive integer  $m$ . Optimization Penalized Weighted Least Square (PWLS) involves weighting in form of random error variance-covariance matrix as has been described in equation (8). To obtain the estimate of the regression curve  $f_{ki}$  using optimization PWLS that is the completion of optimization as follows [5]:

$$\text{Min}_{f_{ki}} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^2 N(y_i | f) W(y_i | f) \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} (f_{ki}^{(m)}(x_{ki}))^2 dx_{ki}. \quad (6)$$

The PWLS optimization in equation (6) in addition to considering the weight, also considers the use of  $2r$  smoothing parameter  $\lambda_{ki}$  as a controller between the goodness of fit (the first segment) and the roughness penalty (second segment).



### 3 Result and Discussion

#### 3.1. Form of bi-responses Nonparametric Regression Function for Longitudinal Data

Assume that the data follow the bi-responses nonparametric regression models for longitudinal data:

$$y_{it} \in L f_{it} \in L, \quad (7) \text{ with } y_{it} = (y_{11t}, y_{12t}, \dots, y_{1rt}, y_{21t}, y_{22t}, \dots, y_{2rt})' \text{ as the response}$$

variable,  $L_x$  limited linear function, and  $f_{it} = (f_{11t}, f_{12t}, \dots, f_{1rt}, f_{21t}, f_{22t}, \dots, f_{2rt})'$  is the unknown function and is assumed *smooth* in a sense of contained in space  $H$ . In order to obtain the function (7), Lemma is presented in the following:

**Lemma:** Form of bi-responses Nonparametric Regression Function for Longitudinal Data.

If given the data pairs following the  $(x_{it}, y_{it}, y_{2it})$  bi-responses nonparametric regression model for longitudinal data as given in the equation (3), then the form of the bi-responses nonparametric regression function for longitudinal data is:

$$f_{it}(x) = T_d V_c.$$

**Proof:** The function  $f_{it} = (f_{11t}, f_{12t}, \dots, f_{1rt}, f_{21t}, f_{22t}, \dots, f_{2rt})'$  the unknown function and assumed *smooth* in the sense of being contained in the space  $H$ . Then the space  $H$  is decomposed into a direct sum of two spaces  $H_0$  and  $H_1$ , that is  $H = H_0 \oplus H_1$ , with  $H_0 \perp H_1$ . Suppose the basis for the space  $H_0$  is

$\{g_{ki1}, g_{ki2}, \dots, g_{kim}\}$  and the basis for the space  $H_1$  is  $\{g_{ki1}, g_{ki2}, \dots, g_{kin}\}$ , then for each function  $f_{ki} \in H$  can be presented individually as:

$$f_{ki} = g_{ki} h_{ki}, \quad (8)$$

Furthermore, for each function  $f_{ki} \in H$  can be presented individually as:

$$f_{ki} = g_{ki} h_{ki} = \sum_{j=1}^m d_{kij} g_{kij} + \sum_{t=1}^n c_{kit} g_{kit} = \sum_{k=1}^m d_{ki} + \sum_{t=1}^n c_{ki} \tilde{c}_{ki}. \quad (9)$$

$L_x$  is a limited linear function in the space  $H$  and function  $f_{ki} \in H$ , obtained

$$L f_{x_{it}} = L_x(g_{ki} h_{ki}) = f_{ki}(x_{it}). \quad (10)$$







$$f_{ki}(x_i) = T_{ki} d_{ki} + V_{ki} c_{ki} \quad (14)$$

$T_{ki}$  is the matrix of order  $n \times m$ ,  $d_{ki}$  is the vector of order  $m$ ,  $V_{ki}$  is the matrix of order  $n \times n$ ,  $c_{ki}$  is the vector of order  $n$ . Thus, the form of spline estimator  $f(x)$  is as follows:

$$f(x) = Td + Vc \quad (15)$$

$T$  is the matrix of order  $(2rn) \times (2rm)$  and  $V$  is the matrix of order  $(2rn) \times (2rn)$  as follows:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_{2r} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad V = \begin{bmatrix} V_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_{2r} \end{bmatrix}$$

Based on the above Lemma, it was used as the basis to obtain estimates of the spline as shown in the following theorem:

**Theorem:** the spline estimator in the bi-responses nonparametric regression for longitudinal data. If given the data pairs following the bi-responses nonparametric regression models involving a single predictor variable on longitudinal data that meets the functional form of bi-responses nonparametric regression for longitudinal data as presented in the Lemma above, and with the assumption  $E(\epsilon_i) = 0$  and  $\text{Var}(\epsilon_i) = W^{(1)}$  (presented in the equation 4) so the spline estimator minimizing PWLS in the equation (6) is  $\hat{f} = A^{-1} y$  with:

$$A = T^T M W^{(1)} T + V^T M W^{(1)} V \quad \text{and} \quad y = \begin{bmatrix} T^T M W^{(1)} y_1 + V^T M W^{(1)} y_2 \end{bmatrix}$$

**Proof:** Given the equation (15), then regression curve estimator  $f$  will be obtained. For the purposes of this estimation, *Reproducing Kernel Hilbert Space* (RKHS) approach will be used if we want to meet the estimation  $f$  which completes the PWLS estimation:



$$\text{Min} \sum_{k=1,2;\dots,r} \left\| \mathbf{W} \begin{bmatrix} f_{ki} - Hf \\ H \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \text{Min}_{k=1,2;\dots,r} \left\| \mathbf{W} (y - \tilde{f}) \right\|_2^2, \quad (16)$$

With  $\left\| \begin{bmatrix} f_{ki} \\ H \end{bmatrix} \right\|_2^2$  constrain:  $f_{ki} \in \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$

Then function  $H = W [2^m a_{ki}, b_{ki}]$  used was Sobolev order-2 space which is defined as follows:  $W [2^m a_{ki}, b_{ki}] = \{ f; \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} [f^{(m)}(x_i)]^2 dx_i < \infty \}$ ,

with  $a_{ki} \leq x_{ki} \leq b_{ki}$ . Based on that space, norm for each function  $f_{ki} \in W [2^m a_{ki}, b_{ki}]$ ,

defined is  $\|f_{ki}\|_2 = \left( \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} [f_{ki}^{(m)}(x_i)]^2 dx_i \right)^{1/2}$ .

Optimization with constrain on the equation (16) can be written as :

$$\text{Min}_m \sum_{k=1,2;\dots,r} \left\| \mathbf{W} \begin{bmatrix} f_{ki} - Hf \\ H \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \text{Min}_{2^m} \sum_{k=1,2;\dots,r} \left\| \mathbf{W} (y - \tilde{f}) \right\|_2^2, \quad (17)$$

With constrain  $\int_{a_{ki}}^{b_{ki}} [f_{ki}^{(m)}(x_i)]^2 dx_i < \infty$ ,  $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ .

Weighed optimization with constrain (17) is equivalent to completing PWLS optimization with the equation (6). To complete the optimization, first penalty component must be described:

$$\int_{a_{11}}^{b_{11}} f_{11}^2 dx_{11} = \int_{a_{11}}^{b_{11}} \left( \sum_{i=1}^m c_i \tilde{f}_{11} \right)^2 dx_{11} = P f_{11} = P f_{11}^T P f_{11},$$

As a result

$$\int_{a_{11}}^{b_{11}} f_{11}^2 dx_{11} = \int_{a_{11}}^{b_{11}} \left( \sum_{i=1}^m c_i \tilde{f}_{11} \right)^2 dx_{11} = \mathbf{c}^T \mathbf{V}_{11} \mathbf{c}, \quad (18)$$



Using the same way, it was obtained :

$$\int_{\tilde{c}} \int_{\tilde{V}} f_{ki}^{(m)}(x) dx = \tilde{c}^T \tilde{V} c. \quad (19)$$

Based on the equation (19), *penalty* value gained:

$$\sum_{k=1}^K \int_{\tilde{c}} \int_{\tilde{V}} f_{ki}^{(m)}(x) dx = \tilde{c}^T \tilde{V} c, \quad (20)$$

with  $\tilde{c} = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{2n})^T$ .

Based on the equation (18), the *Goodness of fit* on the PWLS optimization (16) can be written as :

$$N^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = N^{-1} \tilde{y}^T \tilde{V} \tilde{W} \tilde{V} \tilde{d} - \tilde{c}^T \tilde{V} \tilde{W} \tilde{V} \tilde{d} + \tilde{c}^T \tilde{V} \tilde{W} \tilde{V} \tilde{c}. \quad (21)$$

By combining the *goodness of fit* (18) and the *penalty* (20), the PWLS optimization can be presented in the form of :

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\tilde{c}} N^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \sum_{k=1}^K \int_{\tilde{c}} \int_{\tilde{V}} f_{ki}^{(m)}(x) dx \\ = \text{Min}_{\tilde{c}} N^{-1} \tilde{y}^T \tilde{V} \tilde{W} \tilde{V} \tilde{d} - \tilde{c}^T \tilde{V} \tilde{W} \tilde{V} \tilde{d} + \tilde{c}^T \tilde{V} \tilde{W} \tilde{V} \tilde{c} \\ + \lambda \tilde{c}^T \tilde{V} \tilde{W} \tilde{V} \tilde{d} = \text{Min}_{\tilde{c}} \tilde{Q}(\tilde{c}, \tilde{d}) \end{aligned} \quad (22)$$

The completion of the optimization (22), was obtained by partially derivating  $\tilde{Q}(\tilde{c}, \tilde{d})$  against  $\tilde{c}$  then the result was equated to zero, and gave the result :

$$2\tilde{V} \tilde{W} \tilde{V} \tilde{y} + 2\tilde{V} \tilde{W} \tilde{T} \tilde{d} + 2\tilde{V} \tilde{W} \tilde{V} \tilde{c} = 0$$



$$[W]y + [W]Td + [WV][N]c = 0. \quad (23)$$

Suppose given matrix  $M = [WV][N]$

Then the equation (23) can be written as :

$$[W]y + [W]Td + Mc = 0 \quad (24)$$

The equation (24) was multiply with  $M^{-1}$  it was obtained the equation :

$$c = M^{-1}([W]y + [W]Td) \quad (25)$$

Then partial derivatif against  $d$  then the result was equated to zero, it gave the result of :

$$[TW]y + [TW]Td + [TWV]c = 0.$$

Because the equation (25), it was obtained the equation :

$$[TW]y + [TW]Td + [TWV]M^{-1}([W]y + [W]Td) = 0. \quad (26)$$

Because  $M = [WV][N]$  so  $V = [W]^{-1}M([N]^{-1})$ .

As a result, it was obtained the equation :

$$VM^{-1} = W^{-1}(M[N]^{-1}M) = W^{-1}(I[N]^{-1}M)$$

By doubling the equation above with  $W$  it was obtained :

$$WVM^{-1} = I[N]^{-1}M$$

This equation was substituted in the equation (26) it was obtained the equation :

$$[TW]y + [TW]Td + [I[N]^{-1}M]([W]y + [W]Td) = 0.$$

If the equation above was described it was gained the equation :

$$d = [TW]^{-1}([TW]y + [I[N]^{-1}M]([W]y + [W]Td)) \quad (27)$$

The equation (26) was substituted into the equation (24) it was gained :

$$c = M^{-1}([W]y + [W]Td + [I[N]^{-1}M]([W]y + [W]Td)) \quad (28)$$



Based on the Equation (27) and Equation (28), it was obtained the estimator for bi-responses nonparametric regression curve for longitudinal data involving a single predictor variable as follows:  $\hat{f} = Td \hat{V}c$

$$= \{T T M W T T M W \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} + V M W I T T M W T T M W \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \} y.$$

$A \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} y$  (29) with :

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} = T T M W T T M W \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} + V M W I T T M W T T M W \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

### 3.3. Simulation

The spline estimator on the equation (29) was applied in the data simulation. In this study, exponential function used was  $f_{ki}(x) = b_1(e^{b_{x2}} + 4e^{b_{x3}} + 3e^{b_{x4}})$ . The

Plot between predictor variable  $x_{ki}$  and response variable  $y_{ki}$  to be given to Appendix 1. From the simulation results, no form of a particular pattern (the pattern was less clear form) between the predictor variables  $x$  with response variable  $y$  and  $i$  subject ( $y_{ki}$ ). The next stage is to selection of the value of  $m$  based on the highest value of coefficient of determiation ( $R^2$ ), the lowest value of Generalized Cross Validation (GCV) and Minimum Square Error (MSE) as follows:

**Table 1. the results of  $m$  value selection**

$m$	2	3	4
$R^2$	85.80%	92.94%	94.63%
MSE	1.2220	0.8442	0.7366
GCV	181.37	110.34	108.011

From the results of the selection value of  $m$ , it showed that the value of  $m=4$  (cubic spline) gave the best results (the highest  $R^2$ , and the lowest GCV-MSE). The next stage is to choose the smoothing parameter based on the value of the minimum

GCV. Appendix 2 presents the results of the partial smoothing parameter ( $\lambda_{ki}$ ) based on the minimum value of GCV, by conditioning the other parameters which were constant. The optimizations results showed that the optimization of the minimum value of GCV is 108.011 for each parameter value as follows:

$$\lambda_{11} = 4.3; \lambda_{12} = 3.0; \lambda_{13} = 4.7; \lambda_{21} = 4.1; \lambda_{22} = 2.8; \lambda_{23} = 4.7$$



Appendix 3 shows the results of bi-responses spline estimator for longitudinal data that provide the minimum value of GCV. bi-responses spline estimator for longitudinal data on the simulated data was highly dependent on optimal smoothing parameter. Of the optimal solution, the curve can describe 94.63% of the variability of the original data.

#### 4 Conclusion

Based on the results of the study presented on the previous part, several things can be concluded as follows:

1. Bi-responses nonparametric regression model on longitudinal data on the  $_{ki} f_{ki}$

$(x_{ki})_{ki}$  has a function form  $f(x) = Td + Vc$ , equation  $y$  with

$$T_{11} = 0 \quad \dots \quad 0 \quad T_{12} \quad \dots \quad 0 \quad T_{1r} \quad \dots \quad 0 \quad T_{1k1, ki1, ki2} \quad \dots \quad T_{1kin, kin}$$

$$T_{21} = 0 \quad \dots \quad 0 \quad T_{22} \quad \dots \quad 0 \quad T_{2r} \quad \dots \quad 0 \quad T_{2k1, ki1} \quad \dots \quad T_{2kin, kin}$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1r} & \dots & T_{1k1, ki1, ki2} & \dots & T_{1kin, kin} \\ T_{21} & \dots & T_{2r} & \dots & T_{2k1, ki1} & \dots & T_{2kin, kin} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{r1} & \dots & T_{rr} & \dots & T_{rk1, ki1, ki2} & \dots & T_{rkin, kin} \end{pmatrix}$$

$$V_{11} = 0 \quad \dots \quad 0 \quad V_{12} \quad \dots \quad 0 \quad V_{1r} \quad \dots \quad 0 \quad V_{1k1, ki1, ki2} \quad \dots \quad V_{1kin, kin}$$

$$V_{21} = 0 \quad \dots \quad 0 \quad V_{22} \quad \dots \quad 0 \quad V_{2r} \quad \dots \quad 0 \quad V_{2k1, ki1} \quad \dots \quad V_{2kin, kin}$$

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{1r} & \dots & V_{1k1, ki1, ki2} & \dots & V_{1kin, kin} \\ V_{21} & \dots & V_{2r} & \dots & V_{2k1, ki1} & \dots & V_{2kin, kin} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{r1} & \dots & V_{rr} & \dots & V_{rk1, ki1, ki2} & \dots & V_{rkin, kin} \end{pmatrix}$$

$$V_{11} = 0 \quad \dots \quad 0 \quad V_{12} \quad \dots \quad 0 \quad V_{1r} \quad \dots \quad 0 \quad V_{1k1, ki1, ki2} \quad \dots \quad V_{1kin, kin}$$

2. Bi-responses nonparametric regression of the spline estimator on longitudinal data which meet the criteria of minimizing PWLS

$$y = f_1 W y = f_2 W y = f_3 W y = \dots = f_m W y$$

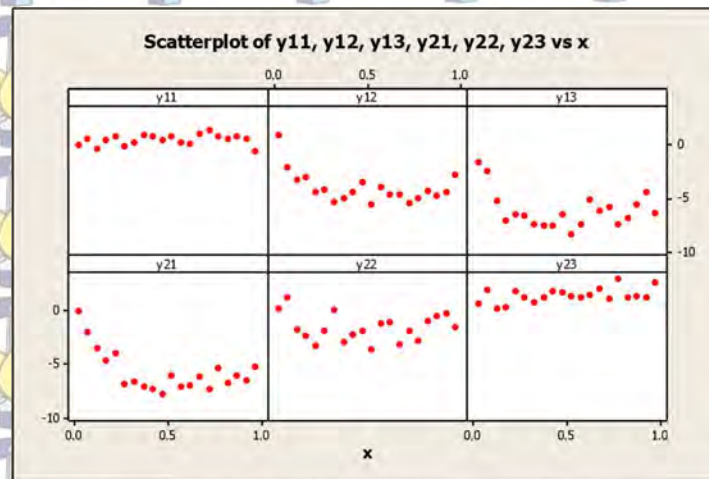


- [1]. Antoniadis, A., and Sapatinas, T. (2007). Estimation and Inference in Functional Mixed-Effects Models. *Computational Statistics and Data* **51**, 4793-4813.
- [2]. Budiantara, I.N., Subanar and Soejoeti, Z. (1997). Weighted Spline Estimator *Proc 51<sup>st</sup> Session of the International Statistical Institute*, Istanbul, 333-334.
- [3]. Chen, H., and Wang, Y. (2011). A Penalized Spline Approach to Functional Mixed Effects Model Analysis. *Biometrics* **67**, 861-870.
- [4]. Diggle, P.J., Liang, Y.K. and Zeger, S.L., (2006), *Analysis of Longitudinal Data*, Second Edition. Oxford Statistical Science Series 13, New York.
- [5]. Eubank, R.L. (1999). *Nonparametric Regression and Spline Smoothing* Second Edition. New York. Marcel Dekker, Inc.
- [6]. Hardle, W. (1990), *Applied Nonparametric Regression*. New York. Cambridge University Press
- [7]. Lestari, B., Budiantara, I.N., Sunaryo, S., and Mashuri M. (2010). Spline Estimator in Multiresponse Nonparametric Regression Model with Unequal Correlation of Errors. *Mathematics and Statistics*, **6**(3): 327-332.
- [8]. Lin, X., Wang, N., Welsh A.H., and Carrol R. (2006). Equivalent Kernels of Smoothing Splines in Nonparametric Regression for Clustered/Longitudinal Data. *Biometrika* **91**(1), 177-193.
- [9]. Wahba, G. (1990). *Spline Models for Observational Data*. Pennsylvania. SIAM



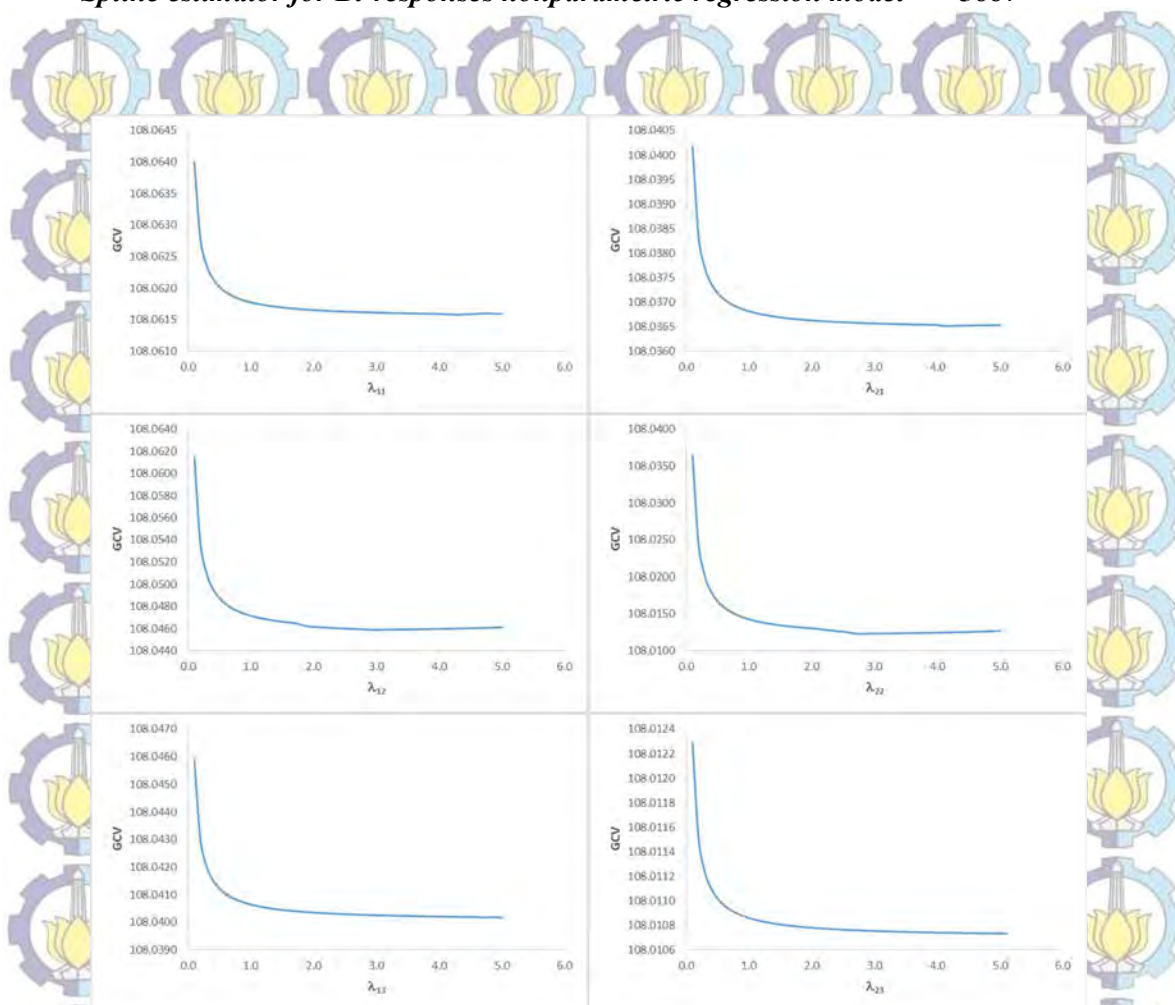
- [10]. Wang, Y., Guo, W., and Brown, M.B. (2000). Spline Smoothing for Bivariate Data With Application to Association Between Hormones. *Statistica Sinica* 10, 377-397.
- [11]. Wu, H. and Zhang, J.T. (2006). *Nonparametric Regression Methods for Longitudinal Data Analysis*. New Jersey. A John-Wiley and Sons, Inc Publication.

#### Appendix 1. Plot of Simulation Data



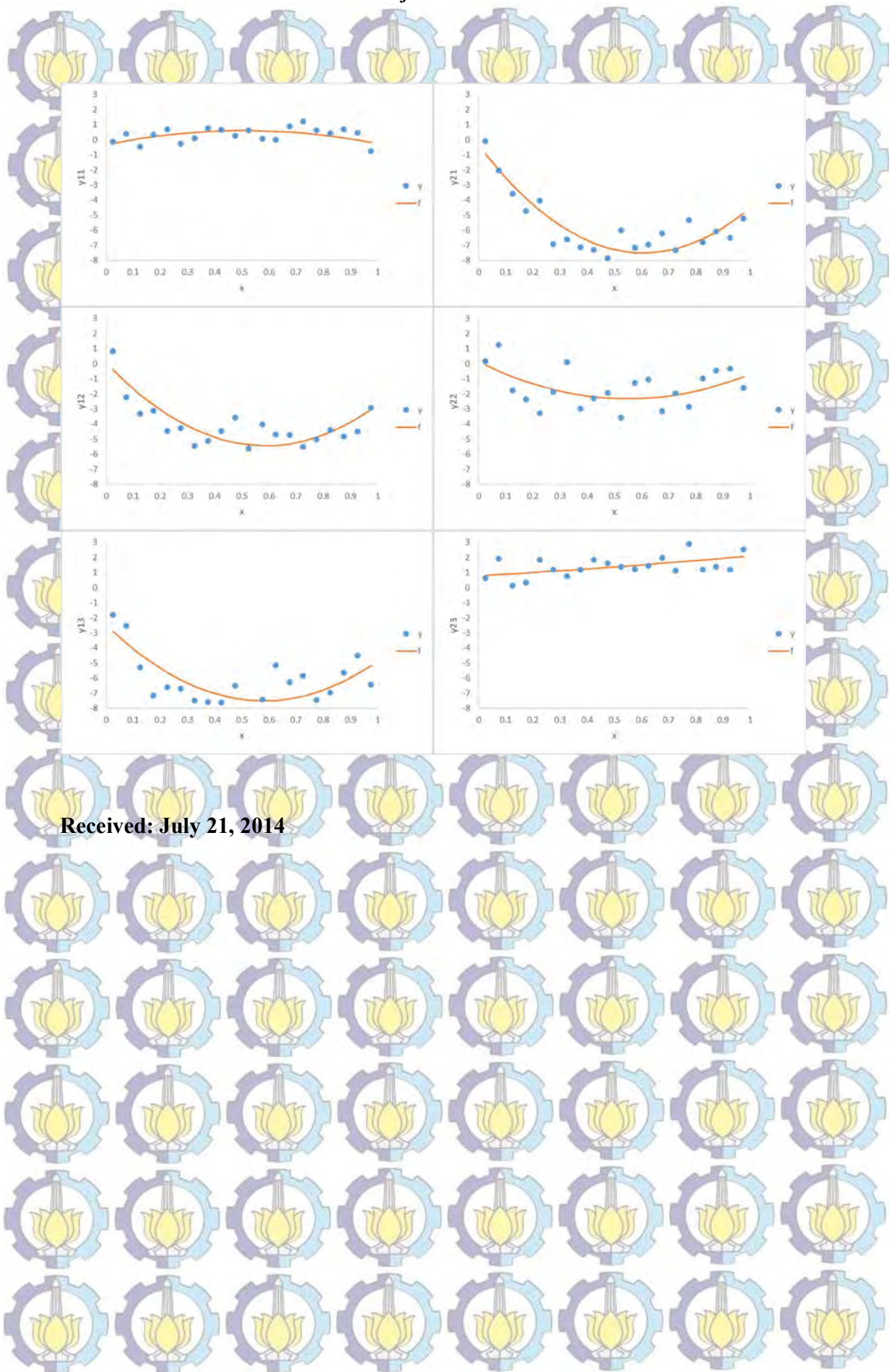
#### Appendix 2. Smoothing Parameter





### Appendix 3. Spline Estimator of Bi-responses Longitudinal Data





Received: July 21, 2014





Ujian Disertasi (Tertutup)

# Estimator *Spline* dalam Regresi Nonparametrik Birespon Untuk Data Longitudinal (Studi Kasus Pada Pasien Penderita TB Paru di Malang)

Oleh: Adji Achmad Rinaldo Fernandes (1311301001)

Promotor:

Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.

Ko-promotor:

Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si.

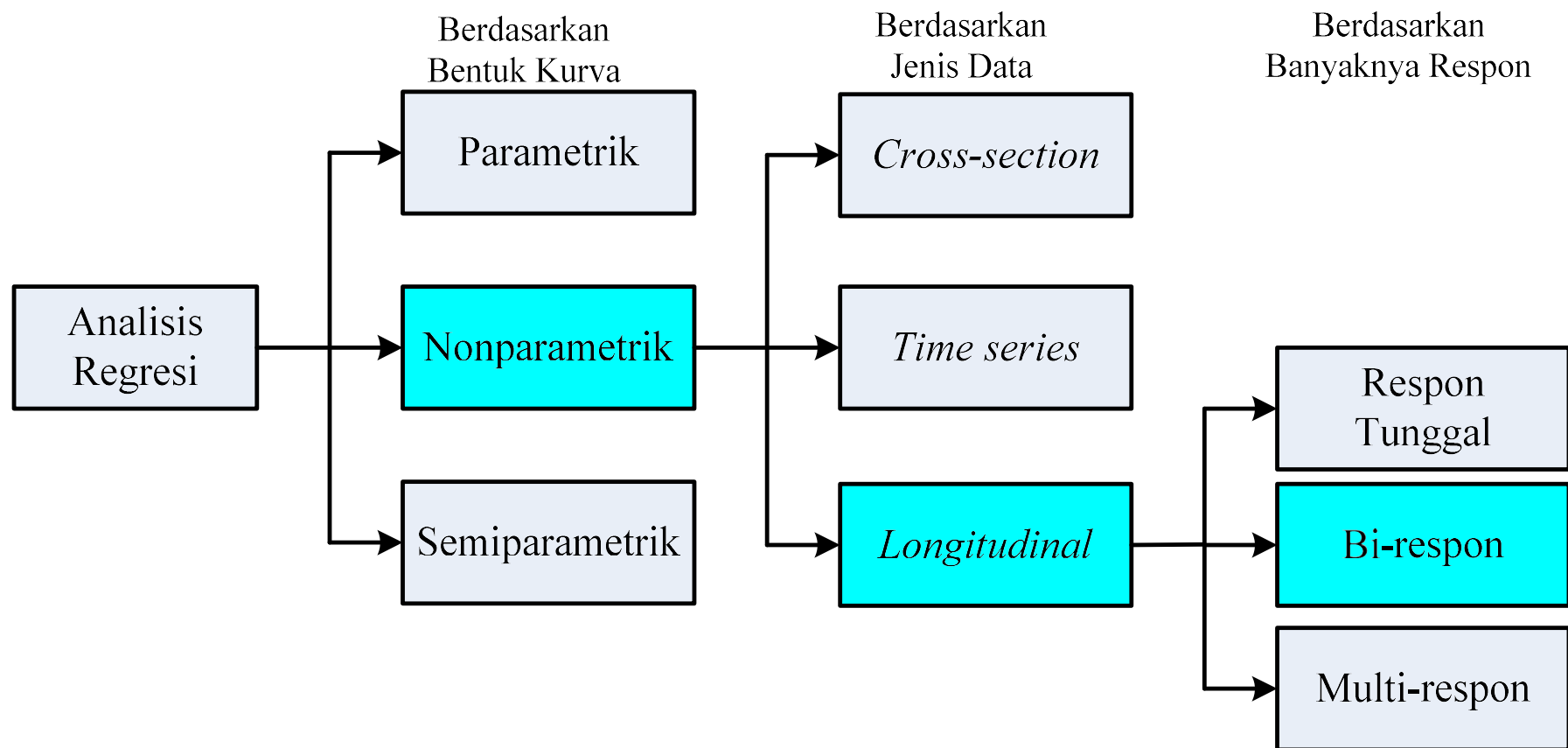
Dr. Suhartono, S.Si., M.Sc.

Surabaya, Selasa, 16.02.2016

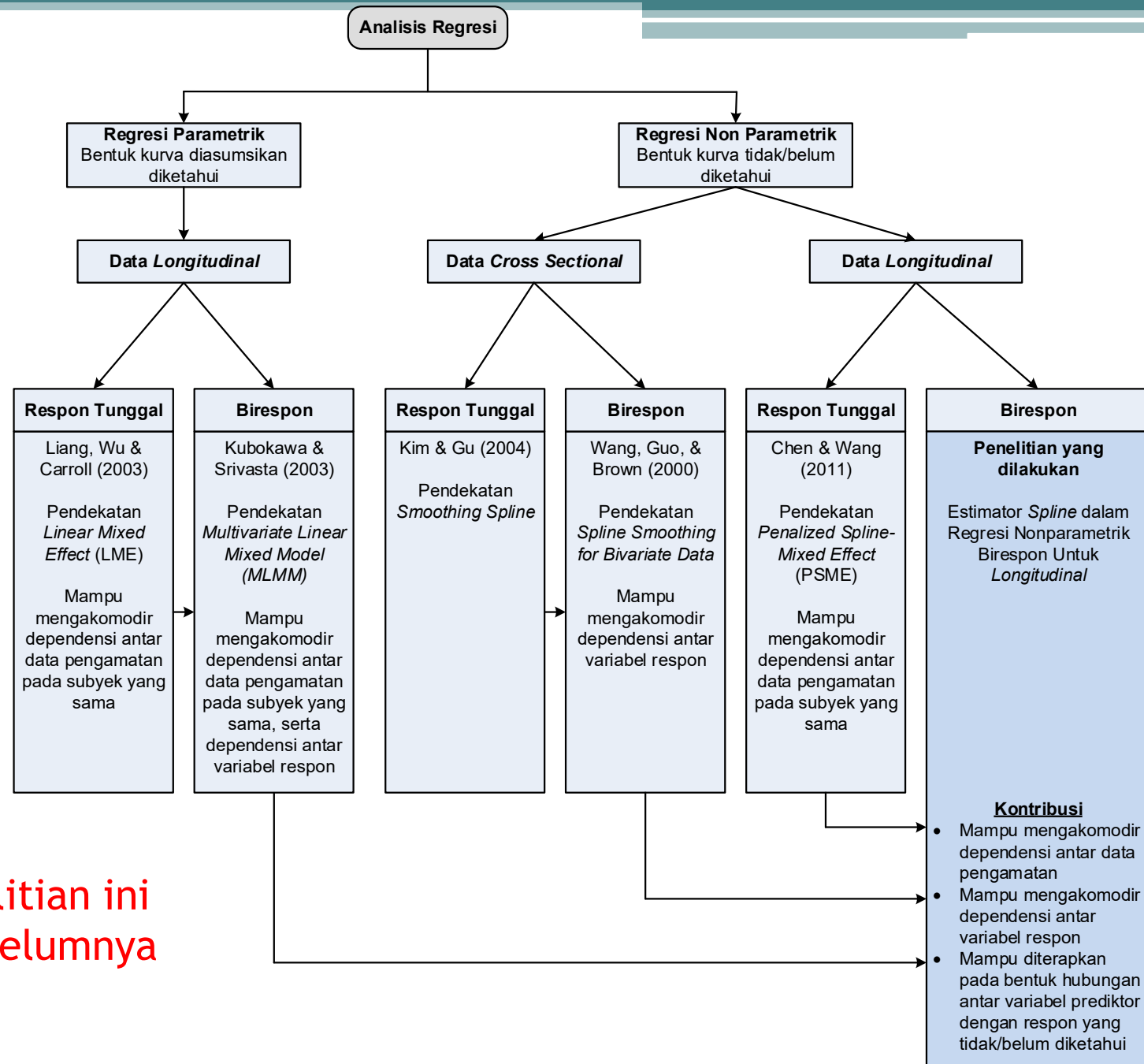




# Latar Belakang







Posisi Penelitian ini  
dengan sebelumnya





# Tujuan Penelitian

Mendapatkan bentuk estimator *spline* dan pemilihan parameter penghalus optimal untuk mengestimasi kurva regresi nonparametrik birespon pada data *longitudinal*.

Mengaplikasikan model regresi nonparametrik birespon *spline* data pasien penderita TB paru di RSSA Malang.

Mengaplikasikan model regresi nonparametrik birespon *spline* pada data simulasi.





## Batasan Penelitian

- Respon dan prediktor menggunakan skala ukur interval atau rasio.
- Antar prediktor bersifat aditif.
- Antara prediktor dengan respon memiliki bentuk hubungan tidak linier dan belum diketahui bentuk polanya.
- Data *longitudinal* yang digunakan memiliki jumlah pengamatan ( $T$ ) pada tiap subyek adalah sama atau seimbang.
- Data simulasi yang digunakan fungsi eksponensial, trigonometri, dan polinomial dengan penggunaan 2 prediktor, serta 3 subyek.

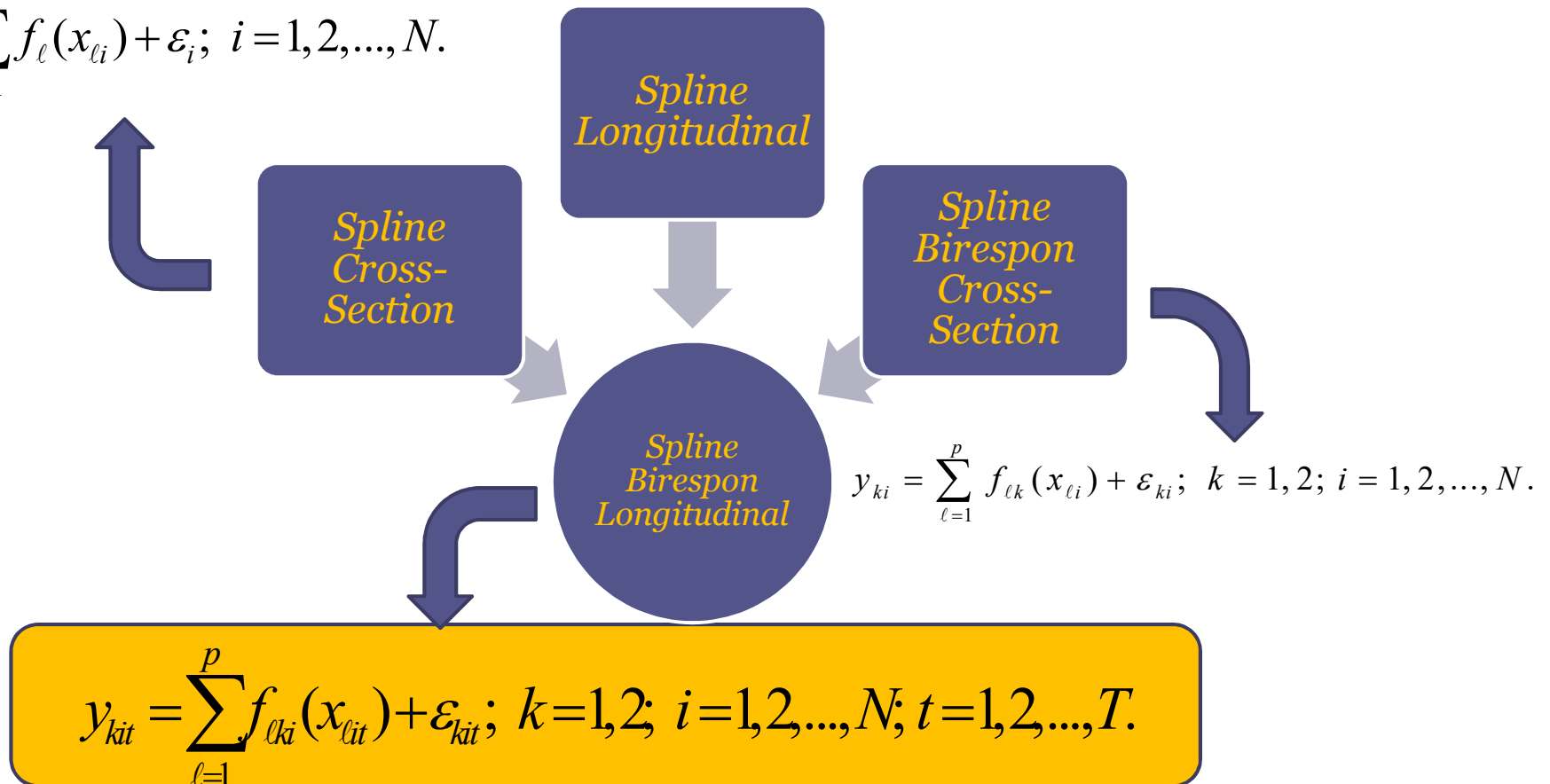




# Spline Birespon Untuk Data Longitudinal

$$y_i = \sum_{\ell=1}^p f_{\ell}(x_{\ell i}) + \varepsilon_i; \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

$$y_{it} = \sum_{\ell=1}^p f_{\ell i}(x_{\ell it}) + \varepsilon_{it}; \quad i = 1, 2, \dots, N; t = 1, 2, \dots, T.$$







## Spline Birespon Untuk Data Longitudinal (2)

Matriks varians-kovarians error random  $\Sigma$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11.1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \Sigma_{12.1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{11.2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Sigma_{12.2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Sigma_{11.N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Sigma_{12.N} \\ \Sigma_{12.1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \Sigma_{22.1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{12.2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Sigma_{22.2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Sigma_{12.N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Sigma_{22.N} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{kk.i} = \begin{bmatrix} \sigma_{kk.i(1)}^2 & \sigma_{kk.i(1,2)} & \cdots & \sigma_{kk.i(1,T)} \\ \sigma_{kk.i(2,1)} & \sigma_{kk.i(2)}^2 & \cdots & \sigma_{kk.i(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{kk.i(T,1)} & \sigma_{kk.i(T,2)} & \cdots & \sigma_{kk.i(T)}^2 \end{bmatrix}_{T \times T}$$

$$\Sigma_{12.i} = \begin{bmatrix} \sigma_{12.i(1,1)} & \sigma_{12.i(1,2)} & \cdots & \sigma_{12.i(1,T)} \\ \sigma_{12.i(2,1)} & \sigma_{12.i(2,2)} & \cdots & \sigma_{12.i(2,T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{12.i(T,1)} & \sigma_{12.i(T,2)} & \cdots & \sigma_{12.i(T,T)} \end{bmatrix}_{T \times T}$$

Untuk mendapatkan estimasi kurva regresi menggunakan optimasi PWLS yaitu penyelesaian optimasi sebagai berikut

$$\text{Min}_{\substack{f_{\ell ki} \in W_2^m[a_{\ell ki}, b_{\ell ki}], \ell=1,2,\dots,p; \\ k=1,2; i=1,2,\dots,N}} \{M^{-1}(\tilde{y} - \tilde{f})' \Sigma^{-1}(\tilde{y} - \tilde{f}) + \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{\ell ki} \int_{a_{\ell ki}}^{b_{\ell ki}} (f_{\ell ki}^{(m)}(x_{\ell it}))^2 dx_{\ell it}\}.$$





## Metode Penelitian

Kajian teoritik

Estimasi *Spline* dalam regresi nonparametrik birespon untuk data longitudinal



Kajian terapan

Mengaplikasikan model regresi nonparametrik birespon pada data penderita Tuberkulosis Paru dan data simulasi

Struktur data *longitudinal* yang melibatkan dua respon dengan  $p$  prediktor

Subyek ( $i$ )	Waktu Pengamatan ( $t$ )	Respon ( $y$ )		Prediktor ( $x$ )			
		$y_{1it}$	$y_{2it}$	$x_{1it}$	$x_{2it}$	...	$x_{pit}$
1	1	$y_{111}$	$y_{211}$	$x_{111}$	$x_{211}$	$\vdots$	$x_{p11}$
	2	$y_{112}$	$y_{212}$	$x_{112}$	$x_{212}$	$\vdots$	$x_{p12}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$T$	$y_{11T}$	$y_{21T}$	$x_{11T}$	$x_{21T}$	$\vdots$	$x_{p1T}$
2	1	$y_{121}$	$y_{221}$	$x_{121}$	$x_{221}$	$\vdots$	$x_{p21}$
	2	$y_{122}$	$y_{222}$	$x_{122}$	$x_{222}$	$\vdots$	$x_{p22}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$T$	$y_{12T}$	$y_{22T}$	$x_{12T}$	$x_{22T}$	$\vdots$	$x_{p2T}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N$	1	$y_{1N1}$	$y_{2N1}$	$x_{1N1}$	$x_{2N1}$	$\vdots$	$x_{pN1}$
	2	$y_{1N2}$	$y_{2N2}$	$x_{1N2}$	$x_{2N2}$	$\vdots$	$x_{pN2}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$T$	$y_{1NT}$	$y_{2NT}$	$x_{1NT}$	$x_{2NT}$	$\vdots$	$x_{pNT}$





# Hasil Kajian Teoritik

## Lemma dan Teorema

- **Lemma 4.1** Bentuk Fungsi Regresi Nonparametrik Birespon untuk prediktor tunggal
- **Lemma 4.2** Bentuk Fungsi Regresi Nonparametrik Birespon untuk p prediktor
- **Teorema 4.1** Estimator Spline untuk Regresi Nonparametrik Birespon untuk prediktor tunggal
- **Teorema 4.2** Estimator Spline untuk Regresi Nonparametrik Birespon untuk p prediktor
- **Teorema 4.3** Estimasi Matriks Varians-Kovarians Error  $\Sigma$





## Lemma 4.1:

Bentuk Fungsi Regresi Nonparametrik Birespon Untuk Data *Longitudinal* menggunakan Prediktor Tunggal

$$\tilde{f} = \mathbf{T}\tilde{d} + \mathbf{V}\tilde{c}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{12} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_{1N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_{2N} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{ki} = \begin{pmatrix} \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki2} \rangle & \cdots & \langle \eta_{ki1}, \phi_{kim} \rangle \\ \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki2} \rangle & \cdots & \langle \eta_{ki2}, \phi_{kim} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki2} \rangle & \cdots & \langle \eta_{kiT}, \phi_{kim} \rangle \end{pmatrix},$$

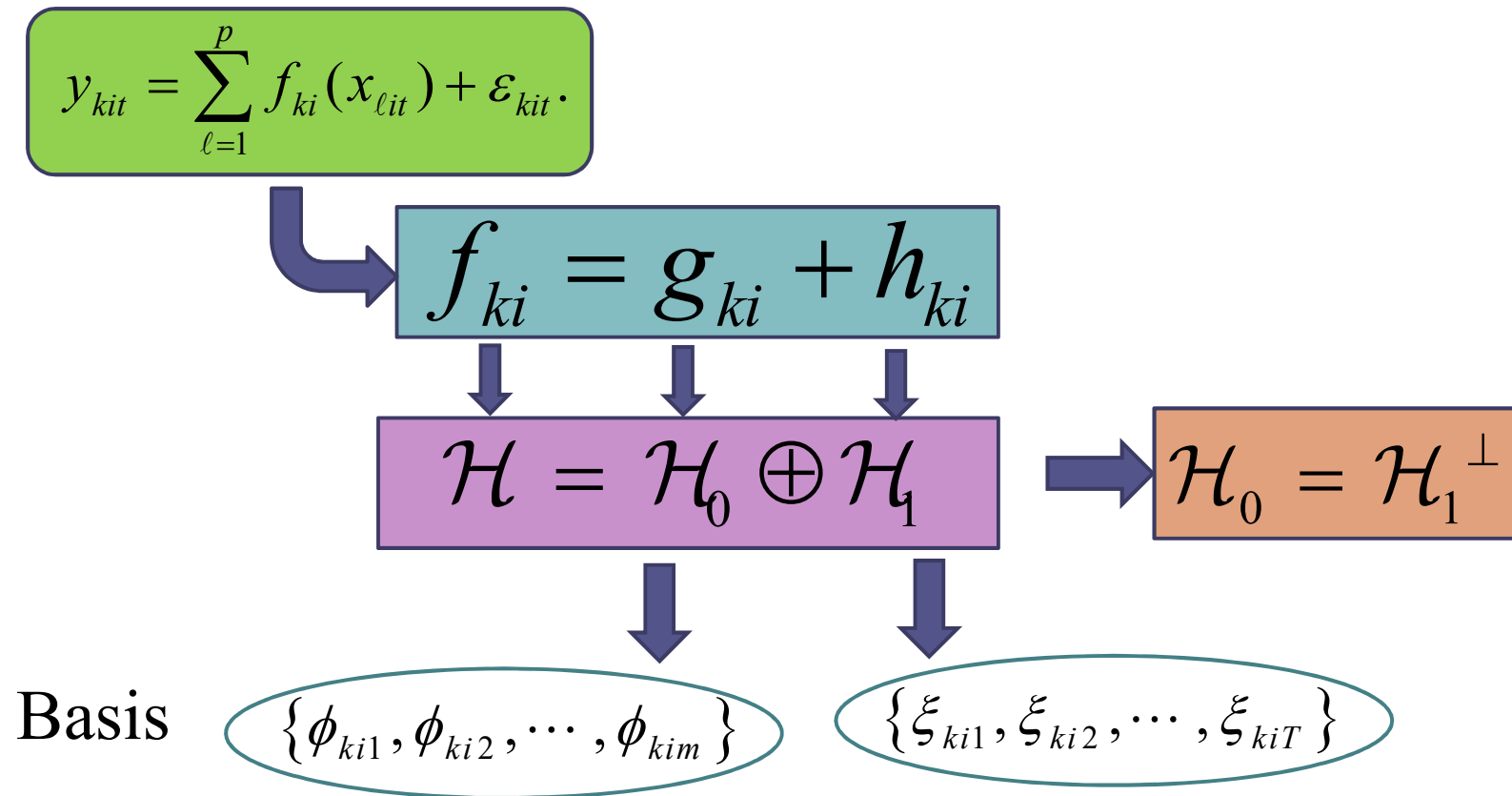
$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{12} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{V}_{1N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{V}_{22} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{V}_{2N} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{ki} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{ki1}, \xi_{ki1} \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \langle \xi_{ki2}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{ki2}, \xi_{ki2} \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{kiT}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \xi_{kiT}, \xi_{ki2} \rangle & \cdots & \langle \xi_{kiT}, \xi_{kiT} \rangle \end{pmatrix},$$





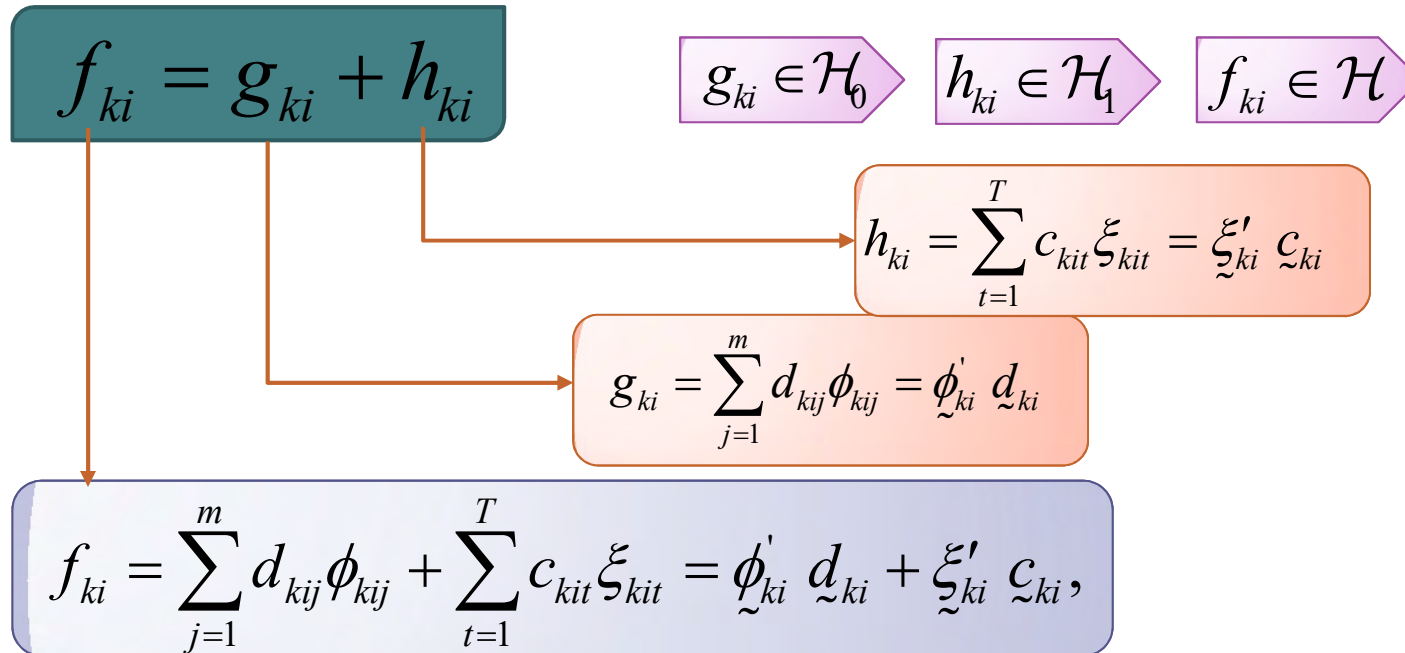
## Bukti Lemma 4.1:







## Bukti Lemma 4.1 (2)



$$\tilde{\phi}_{ki} = (\phi_{ki1}, \phi_{ki2}, \dots, \phi_{kim})', \text{ dan } \underline{d}_{ki} = (d_{ki1}, d_{ki2}, \dots, d_{kim})'$$

$$\tilde{\xi}_{ki} = (\xi_{ki1}, \xi_{ki2}, \dots, \xi_{kiT})', \text{ dan } \underline{c}_{ki} = (c_{ki1}, c_{ki2}, \dots, c_{kiT})'.$$





## Bukti Lemma 4.1 (3)

- $k=1$  dan  $i=1$

$$f_{11}(x_{1t}) = \langle \eta_{11t}, \phi'_{11} d_{11} \rangle + \langle \eta_{11t}, \xi'_{11} c_{11} \rangle, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

- $t=1$

$$f_{11}(x_{11}) = \langle \eta_{111}, \phi'_{11} d_{11} \rangle + \langle \eta_{111}, \xi'_{11} c_{11} \rangle$$

$$f_{11}(x_{11}) = \left\langle \eta_{111}, (\phi_{111} \quad \phi_{112} \quad \dots \quad \phi_{11m}) \begin{pmatrix} d_{111} \\ d_{112} \\ \vdots \\ d_{11m} \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \eta_{111}, (\xi_{111} \quad \xi_{112} \quad \dots \quad \xi_{11T}) \begin{pmatrix} c_{111} \\ c_{112} \\ \vdots \\ c_{11T} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$f_{11}(x_{11}) = d_{111} \langle \eta_{111}, \phi_{111} \rangle + d_{112} \langle \eta_{111}, \phi_{112} \rangle + \dots + d_{11m} \langle \eta_{111}, \phi_{11m} \rangle + c_{111} \langle \eta_{111}, \xi_{111} \rangle + \\ + c_{112} \langle \eta_{111}, \xi_{112} \rangle + \dots + c_{11n} \langle \eta_{111}, \xi_{11T} \rangle$$





## Bukti Lemma 4.1 (4)

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{11}(x_1) &= \begin{pmatrix} f_{11}(x_{11}) \\ f_{11}(x_{12}) \\ \vdots \\ f_{11}(x_{1n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{111} \langle \eta_{111}, \phi_{111} \rangle + \dots + d_{11m} \langle \eta_{111}, \phi_{11m} \rangle + c_{111} \langle \eta_{111}, \xi_{111} \rangle + \dots + c_{11n} \langle \eta_{111}, \xi_{11n} \rangle \\ d_{111} \langle \eta_{112}, \phi_{111} \rangle + \dots + d_{11m} \langle \eta_{112}, \phi_{11m} \rangle + c_{111} \langle \eta_{112}, \xi_{111} \rangle + \dots + c_{11n} \langle \eta_{112}, \xi_{11n} \rangle \\ \vdots \\ d_{111} \langle \eta_{11n}, \phi_{111} \rangle + \dots + d_{11m} \langle \eta_{11n}, \phi_{11m} \rangle + c_{111} \langle \eta_{11n}, \xi_{111} \rangle + \dots + c_{11n} \langle \eta_{11n}, \xi_{11n} \rangle \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \langle \eta_{111}, \phi_{111} \rangle & \langle \eta_{111}, \phi_{112} \rangle & \cdots & \langle \eta_{111}, \phi_{11m} \rangle \\ \langle \eta_{112}, \phi_{111} \rangle & \langle \eta_{112}, \phi_{112} \rangle & \cdots & \langle \eta_{112}, \phi_{11m} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \eta_{11n}, \phi_{111} \rangle & \langle \eta_{11n}, \phi_{112} \rangle & \cdots & \langle \eta_{11n}, \phi_{11m} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{111} \\ d_{112} \\ \vdots \\ d_{11m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle \eta_{111}, \xi_{111} \rangle & \langle \eta_{111}, \xi_{112} \rangle & \cdots & \langle \eta_{111}, \xi_{11n} \rangle \\ \langle \eta_{112}, \xi_{111} \rangle & \langle \eta_{112}, \xi_{112} \rangle & \cdots & \langle \eta_{112}, \xi_{11n} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \eta_{11n}, \xi_{111} \rangle & \langle \eta_{11n}, \xi_{112} \rangle & \cdots & \langle \eta_{11n}, \xi_{11n} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{111} \\ c_{112} \\ \vdots \\ c_{11n} \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{T}_{11} \mathbf{d}_{11} + \mathbf{V}_{11} \mathbf{c}_{11}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{f}_{11}(x_1) = \mathbf{T}_{11} \mathbf{d}_{11} + \mathbf{V}_{11} \mathbf{c}_{11}$$





## Bukti Lemma 4.1 (5)

$$\underset{\sim}{f}_{ki} = \begin{pmatrix} f_{ki}(x_{i1}) \\ f_{ki}(x_{i2}) \\ \vdots \\ f_{ki}(x_{iT}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{ki1} \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki1} \rangle + \dots + d_{kim} \langle \eta_{ki1}, \phi_{kim} \rangle + c_{ki1} \langle \eta_{ki1}, \xi_{ki1} \rangle \\ d_{ki1} \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki1} \rangle + \dots + d_{kim} \langle \eta_{ki2}, \phi_{kim} \rangle + \sum_{t=1}^2 c_{kit} \langle \eta_{ki2}, \xi_{kit} \rangle \\ \vdots \\ d_{ki1} \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki1} \rangle + \dots + d_{kim} \langle \eta_{kiT}, \phi_{kim} \rangle + \sum_{t=1}^T c_{kit} \langle \eta_{kiT}, \xi_{kit} \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki1}, \phi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{ki1}, \phi_{kim} \rangle \\ \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki2}, \phi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{ki2}, \phi_{kim} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{kiT}, \phi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{kiT}, \phi_{kim} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{ki1} \\ d_{ki2} \\ \vdots \\ d_{kim} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle \eta_{ki1}, \xi_{ki1} \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle \eta_{ki2}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{ki2}, \xi_{ki2} \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_{kiT}, \xi_{ki1} \rangle & \langle \eta_{kiT}, \xi_{ki2} \rangle & \dots & \langle \eta_{kiT}, \xi_{kiT} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{ki1} \\ c_{ki2} \\ \vdots \\ c_{kiT} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{f}_{ki}(x_i) = \mathbf{T}_{ki} \underset{\sim}{d}_{ki} + \mathbf{V}_{ki} \underset{\sim}{c}_{ki}$$

$$\underset{\sim}{f}(x) = \mathbf{T} \underset{\sim}{d} + \mathbf{V} \underset{\sim}{c} \quad \blacksquare$$





## Lemma 4.2:

Bentuk Fungsi Regresi Nonparametrik Birespon  
Untuk Data *Longitudinal* menggunakan  $p$  Prediktor

$$\tilde{f} = \mathbf{T}^* \tilde{d}^* + \mathbf{V}^* \tilde{c}^*$$

$$\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11}^* & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{12}^* & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_{1N}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{21}^* & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22}^* & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_{2N}^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{ki}^* = \mathbf{T}_{1ki} + \mathbf{T}_{2ki} + \cdots + \mathbf{T}_{pki}$$

$$\mathbf{T}_{\ell ki} = \begin{pmatrix} \langle \eta_{\ell ki1}, \phi_{\ell ki1} \rangle & \langle \eta_{\ell ki1}, \phi_{\ell ki2} \rangle & \cdots & \langle \eta_{\ell ki1}, \phi_{\ell kim} \rangle \\ \langle \eta_{\ell ki2}, \phi_{\ell ki1} \rangle & \langle \eta_{\ell ki2}, \phi_{\ell ki2} \rangle & \cdots & \langle \eta_{\ell ki2}, \phi_{\ell kim} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_{\ell kiT}, \phi_{\ell ki1} \rangle & \langle \eta_{\ell kiT}, \phi_{\ell ki2} \rangle & \cdots & \langle \eta_{\ell kiT}, \phi_{\ell kim} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{ki}^* = \mathbf{V}_{1ki} + \mathbf{V}_{2ki} + \cdots + \mathbf{V}_{pki}$$

$$\mathbf{V}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11}^* & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{12}^* & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{V}_{1N}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{V}_{21}^* & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{V}_{22}^* & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{V}_{2N}^* \end{pmatrix}$$

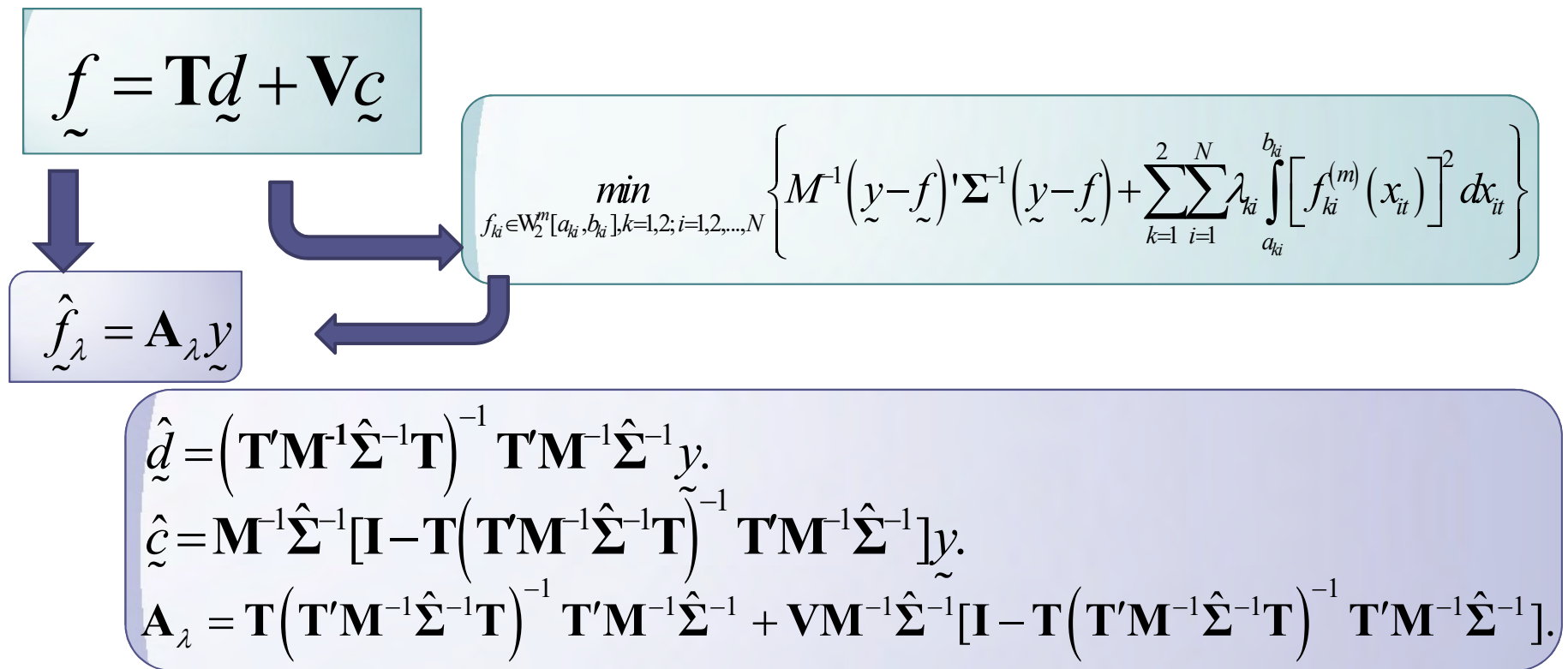
$$\mathbf{V}_{\ell ki} = \begin{pmatrix} \langle \xi_{\ell ki1}, \xi_{\ell ki1} \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \langle \xi_{\ell ki2}, \xi_{\ell ki1} \rangle & \langle \xi_{\ell ki2}, \xi_{\ell ki2} \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_{\ell kiT}, \xi_{\ell ki1} \rangle & \langle \xi_{\ell kiT}, \xi_{\ell ki2} \rangle & \cdots & \langle \xi_{\ell kiT}, \xi_{\ell kiT} \rangle \end{pmatrix}$$





## Teorema 4.1:

Estimator *Spline* untuk Regresi  
Nonparametrik Birespon Untuk Data  
*Longitudinal* menggunakan Prediktor Tunggal







## Bukti Teorema 4.1

PWLS

$$\min_{f_{ki} \in \mathcal{W}_2^m[a_{ki}, b_{ki}], k=1,2; i=1,2,\dots,N} \left\{ M^{-1}(\underline{y} - \underline{f})' \Sigma^{-1}(\underline{y} - \underline{f}) + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} \left[ f_{ki}^{(m)}(x_{it}) \right]^2 dx_{it} \right\}$$

$R(f)$

$$M^{-1}(\underline{y} - \underline{f})' \Sigma^{-1}(\underline{y} - \underline{f}) = M^{-1}(\underline{y} - \mathbf{T}\underline{d} - \mathbf{V}\underline{c})' \Sigma^{-1}(\underline{y} - \mathbf{T}\underline{d} - \mathbf{V}\underline{c}).$$

$J(f)$

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \int_{a_{ki}}^{b_{ki}} \left[ f_{ki}^{(m)}(x_{it}) \right]^2 dx_{it} = \underline{c}' \Lambda \mathbf{V} \underline{c}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \mathbf{I}_T & \mathbf{0}_T & \cdots & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \cdots & \mathbf{0}_T \\ \mathbf{0}_T & \lambda_{12} \mathbf{I}_T & \cdots & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \cdots & \mathbf{0}_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \cdots & \lambda_{1N} \mathbf{I}_T & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \cdots & \mathbf{0}_T \\ \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \cdots & \mathbf{0}_T & \lambda_{21} \mathbf{I}_T & \mathbf{0}_T & \cdots & \mathbf{0}_T \\ \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \cdots & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \lambda_{22} \mathbf{I}_T & \cdots & \mathbf{0}_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \cdots & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \mathbf{0}_T & \cdots & \lambda_{2N} \mathbf{I}_T \end{bmatrix}$$

PWLS

$$\min_{\substack{\underline{c} \in \mathcal{R}^{2NT} \\ \underline{d} \in \mathcal{R}^{2Nm}}} \left\{ M^{-1}(\underline{y} - \mathbf{T}\underline{d} - \mathbf{V}\underline{c})' \Sigma^{-1}(\underline{y} - \mathbf{T}\underline{d} - \mathbf{V}\underline{c}) + \underline{c}' \Lambda \mathbf{V} \underline{c} \right\}$$





## Bukti Teorema 4.1 (2)

PWLS

$$\min_{\substack{\underline{c} \in \mathbb{R}^{2NT} \\ \underline{d} \in \mathbb{R}^{2Nm}}} \left\{ M^{-1} (\underline{y} - \mathbf{T}\underline{d} - \mathbf{V}\underline{c})' \Sigma^{-1} (\underline{y} - \mathbf{T}\underline{d} - \mathbf{V}\underline{c}) + \underline{c}' \Lambda \mathbf{V} \underline{c} \right\}$$

$$Q(\underline{c}, \underline{d}) = M^{-1} (\underline{y} - \mathbf{T}\underline{d} - \mathbf{V}\underline{c})' \Sigma^{-1} (\underline{y} - \mathbf{T}\underline{d} - \mathbf{V}\underline{c}) + \underline{c}' \Lambda \mathbf{V} \underline{c}$$

$$\mathbf{M} = \Sigma^{-1} \mathbf{V} + \mathbf{M} \Lambda.$$

$$\frac{\partial Q(\underline{c}, \underline{d})}{\partial \underline{c}} = 0 \rightarrow \hat{\underline{c}} = \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T} (\mathbf{T}' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1}] \underline{y}.$$

$$\frac{\partial Q(\underline{c}, \underline{d})}{\partial \underline{d}} = 0 \rightarrow \hat{\underline{d}} = (\mathbf{T}' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \underline{y}.$$

$$\hat{\underline{f}}_{\lambda} = \mathbf{T} \hat{\underline{d}} + \mathbf{V} \hat{\underline{c}} = \mathbf{A}_{\lambda} \underline{y}$$

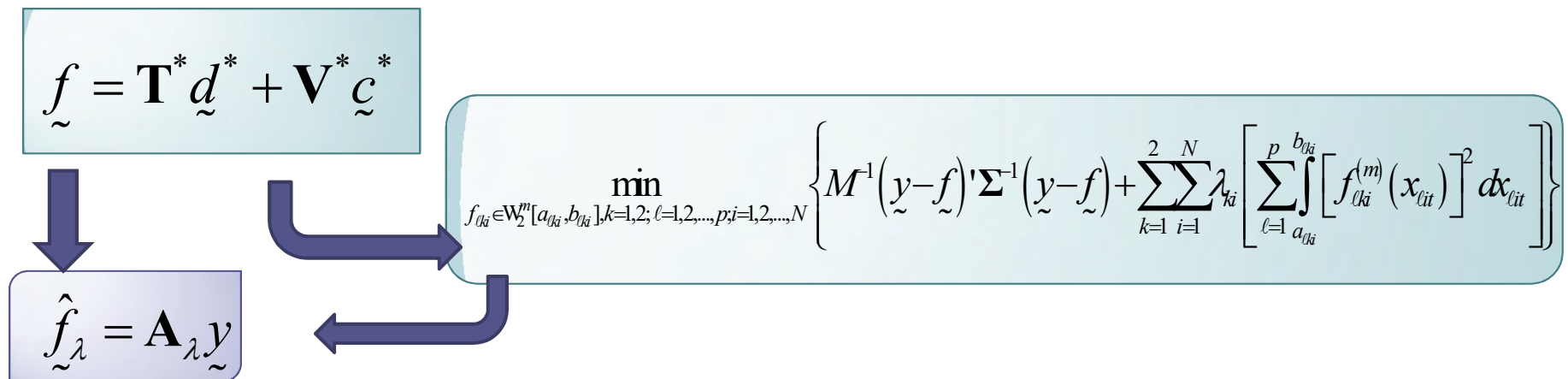
$$\mathbf{A}_{\lambda} = \mathbf{T} (\mathbf{T}' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} + \mathbf{V} \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T} (\mathbf{T}' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1}]. \blacksquare$$





## Teorema 4.2:

Estimator *Spline* untuk Regresi  
Nonparametrik Birespon Untuk Data  
*Longitudinal* menggunakan  $p$  Prediktor



$$\hat{\underline{d}}^* = \left( \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \underline{y}.$$

$$\hat{\underline{c}}^* = \mathbf{M}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}] \underline{y}.$$

$$\mathbf{A}_{\lambda}^* = \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} + \mathbf{V}^* \mathbf{M}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Sigma}} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}].$$





## Teorema 4.3:

## Estimasi Matriks Varians-Kovarians Error $\hat{\Sigma}$

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{11.1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \hat{\Sigma}_{12.1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\Sigma}_{11.2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\Sigma}_{12.2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \hat{\Sigma}_{11.N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \hat{\Sigma}_{12.N} \\ \hat{\Sigma}_{12.1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \hat{\Sigma}_{22.1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\Sigma}_{12.2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\Sigma}_{22.2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \hat{\Sigma}_{12.N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \hat{\Sigma}_{22.N} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_{11.1} = \frac{(\tilde{y}_{11} - \hat{f}_{11})(\tilde{y}_{11} - \hat{f}_{11})'}{T},$$

$$\hat{\Sigma}_{11.2} = \frac{(\tilde{y}_{12} - \hat{f}_{12})(\tilde{y}_{12} - \hat{f}_{12})'}{T},$$

$$\vdots$$

$$\hat{\Sigma}_{11.N} = \frac{(\tilde{y}_{1N} - \hat{f}_{1N})(\tilde{y}_{1N} - \hat{f}_{1N})'}{T},$$

$$\hat{\Sigma}_{22.1} = \frac{(\tilde{y}_{21} - \hat{f}_{21})(\tilde{y}_{21} - \hat{f}_{21})'}{T},$$

$$\hat{\Sigma}_{22.2} = \frac{(\tilde{y}_{22} - \hat{f}_{22})(\tilde{y}_{22} - \hat{f}_{22})'}{T},$$

$$\vdots$$

$$\hat{\Sigma}_{22.N} = \frac{(\tilde{y}_{2N} - \hat{f}_{2N})(\tilde{y}_{2N} - \hat{f}_{2N})'}{T},$$

$$\hat{\Sigma}_{12.1} = \frac{(\tilde{y}_{11} - \hat{f}_{11})(\tilde{y}_{21} - \hat{f}_{21})'}{T},$$

$$\hat{\Sigma}_{12.2} = \frac{(\tilde{y}_{12} - \hat{f}_{12})(\tilde{y}_{22} - \hat{f}_{22})'}{T},$$

$$\vdots$$

$$\hat{\Sigma}_{12.N} = \frac{(\tilde{y}_{1N} - \hat{f}_{1N})(\tilde{y}_{2N} - \hat{f}_{2N})'}{T}.$$





## Bukti Teorema 4.3

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Densitas Gabungan} \\ \text{dari } \xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{2N} \end{array} \right\} = L(\underline{f}, \underline{\Sigma} | \underline{y}) = \prod_{t=1}^T \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{M/2} |\underline{\Sigma}|^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\underline{y} - \underline{f})' \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{y} - \underline{f}) \right) \right\}$$

$$L(\underline{f}, \underline{\Sigma} | \underline{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{TM/2} |\underline{\Sigma}|^{T/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\underline{y} - \underline{f})' \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{y} - \underline{f}) \right)$$

$$L(\underline{f}, \underline{\Sigma} | \underline{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{TM/2} |\underline{\Sigma}|^{T/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \text{tr} \left[ \underline{\Sigma}^{-1} \sum_{t=1}^T (\underline{y} - \underline{f})(\underline{y} - \underline{f})' \right] \right)$$

$$\frac{\partial L(\underline{f}, \underline{\Sigma} | \underline{y})}{\partial \underline{\Sigma}} = \mathbf{0}. \quad \longrightarrow \quad \hat{\underline{\Sigma}} = \frac{\sum_{t=1}^T (\underline{y} - \hat{\underline{f}})(\underline{y} - \hat{\underline{f}})'}{T}$$





## Bukti Teorema 4.3 (2)

$$\begin{aligned}
 L(\tilde{f}, \Sigma | \tilde{y}) = & \frac{1}{(2\pi)^{TM/2} |\Sigma|^{T/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \{ (\tilde{y}_{11t} - \tilde{f}_{11t})' \Sigma_{11.1} (\tilde{y}_{11t} - \tilde{f}_{11t}) + (\tilde{y}_{12t} - \tilde{f}_{12t})' \Sigma_{11.2} (\tilde{y}_{12t} - \tilde{f}_{12t}) + \right. \\
 & + \cdots + (\tilde{y}_{1Nt} - \tilde{f}_{1Nt})' \Sigma_{11.N} (\tilde{y}_{1Nt} - \tilde{f}_{1Nt}) + (\tilde{y}_{21t} - \tilde{f}_{21t})' \Sigma_{22.1} (\tilde{y}_{21t} - \tilde{f}_{21t}) + \\
 & (\tilde{y}_{22t} - \tilde{f}_{22t})' \Sigma_{22.2} (\tilde{y}_{22t} - \tilde{f}_{22t}) + \cdots + (\tilde{y}_{2Nt} - \tilde{f}_{2Nt})' \Sigma_{22.N} (\tilde{y}_{2Nt} - \tilde{f}_{2Nt}) + \\
 & (\tilde{y}_{11t} - \tilde{f}_{11t})' \Sigma_{12.1} (\tilde{y}_{21t} - \tilde{f}_{21t}) + (\tilde{y}_{12t} - \tilde{f}_{12t})' \Sigma_{12.2} (\tilde{y}_{22t} - \tilde{f}_{22t}) + \cdots + \\
 & \left. (\tilde{y}_{1Nt} - \tilde{f}_{1Nt})' \Sigma_{12.N} (\tilde{y}_{2Nt} - \tilde{f}_{2Nt}) \} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L(\tilde{f}, \Sigma_{kk.i} | \tilde{y})}{\partial \Sigma_{kk.i}} = \mathbf{0}. \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} \hat{\Sigma}_{11.1}, \hat{\Sigma}_{11.2}, \dots, \hat{\Sigma}_{11.N} \\ \hat{\Sigma}_{22.1}, \hat{\Sigma}_{22.2}, \dots, \hat{\Sigma}_{22.N} \\ \hat{\Sigma}_{12.1}, \hat{\Sigma}_{12.2}, \dots, \hat{\Sigma}_{12.N} \end{matrix}$$





## Bukti Teorema 4.3 (3)

Estimasi

$$\hat{\Sigma}_{11.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\tilde{f}, \Sigma_{11.1} | \tilde{y})}{\partial \Sigma_{11.1}} &= \frac{\partial \left( \frac{1}{(2\pi)^{TT/2} |\Sigma_{11.1}|^{T/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\tilde{y}_{11t} - \tilde{f}_{11t})' \Sigma_{11.1} (\tilde{y}_{11t} - \tilde{f}_{11t}) \right\} \right)}{\partial \Sigma_{11.1}} \\ &= \frac{\partial \left( \frac{1}{(2\pi)^{TT/2} |\Sigma_{11.1}|^{T/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Sigma_{11.1}^{-1} \left( \sum_{t=1}^T (\tilde{y}_{11t} - \tilde{f}_{11t})(\tilde{y}_{11t} - \tilde{f}_{11t})' \right) \right] \right\} \right)}{\partial \Sigma_{11.1}} \\ &= -\frac{T}{2} \frac{\partial \ln |\Sigma_{11.1}|}{\partial \Sigma_{11.1}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \left( \text{tr} \left[ \Sigma_{11.1}^{-1} \left( \sum_{t=1}^T (\tilde{y}_{11t} - \tilde{f}_{11t})(\tilde{y}_{11t} - \tilde{f}_{11t})' \right) \right] \right)}{\partial \Sigma_{11.1}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L(\tilde{f}, \Sigma | \tilde{y})}{\partial \Sigma_{11.1}} = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \hat{\Sigma}_{11.1} = \frac{(\tilde{y}_{11} - \hat{\tilde{f}}_{11})(\tilde{y}_{11} - \hat{\tilde{f}}_{11})'}{T}.$$





## Bukti Teorema 4.3 (4)

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$\begin{array}{lll}
 \hat{\Sigma}_{11.1} = \frac{(\underline{y}_{11} - \hat{f}_{11})(\underline{y}_{11} - \hat{f}_{11})'}{T}, & \hat{\Sigma}_{22.1} = \frac{(\underline{y}_{21} - \hat{f}_{21})(\underline{y}_{21} - \hat{f}_{21})'}{T}, & \hat{\Sigma}_{12.1} = \frac{(\underline{y}_{11} - \hat{f}_{11})(\underline{y}_{21} - \hat{f}_{21})'}{T}, \\
 \hat{\Sigma}_{11.2} = \frac{(\underline{y}_{12} - \hat{f}_{12})(\underline{y}_{12} - \hat{f}_{12})'}{T}, & \hat{\Sigma}_{22.2} = \frac{(\underline{y}_{22} - \hat{f}_{22})(\underline{y}_{22} - \hat{f}_{22})'}{T}, & \hat{\Sigma}_{12.2} = \frac{(\underline{y}_{12} - \hat{f}_{12})(\underline{y}_{22} - \hat{f}_{22})'}{T}, \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hat{\Sigma}_{11.N} = \frac{(\underline{y}_{1N} - \hat{f}_{1N})(\underline{y}_{1N} - \hat{f}_{1N})'}{T}, & \hat{\Sigma}_{22.N} = \frac{(\underline{y}_{2N} - \hat{f}_{2N})(\underline{y}_{2N} - \hat{f}_{2N})'}{T}, & \hat{\Sigma}_{12.N} = \frac{(\underline{y}_{1N} - \hat{f}_{1N})(\underline{y}_{2N} - \hat{f}_{2N})'}{T}.
 \end{array}$$





## Aplikasi Estimator *Spline* pada Data Penderita TB Paru

### Uji Korelasi antar Respon pada tiap Subyek dan Keseluruhan

	Subyek				Keseluruhan
	1	2	3	4	
$r$	0,614	0,773	0,588	0,668	0,605
$t$	2,580	4,041	2,411	2,977	5,373
$p$	0,026	0,002	0,035	0,013	0,000

Keterangan: \* korelasi signifikan ( $p < 0,05$ )

### Uji Autokorelasi antar Pengamatan pada Subyek yang Sama

		Subyek			
		1	2	3	4
Respon Pertama ( $y_1$ )	$Q$	7,905	7,079	4,785	8,628
	$p$	0,048*	0,069	0,188	0,035*
Respon Kedua ( $y_2$ )	$Q$	12,804	8,846	4,830	4,561
	$p$	0,005*	0,031*	0,185	0,207

Keterangan: \* autokorelasi signifikan ( $p < 0,05$ )

### Uji Non-Linieritas Ramsey Reset Test

Hubungan	Respon Pertama ( $y_1$ )		Respon Kedua ( $y_2$ )	
	$F$	$p$	$F$	$p$
$x_{11}, x_{21}, x_{31}$ terhadap $y_{11}, y_{21}$	5,317	0,0394*	0,532	0,6094
$x_{12}, x_{22}, x_{32}$ terhadap $y_{12}, y_{22}$	3,146	0,1060	5,584	0,0355*
$x_{13}, x_{23}, x_{33}$ terhadap $y_{13}, y_{23}$	5,016	0,0445*	4,978	0,0452*
$x_{14}, x_{24}, x_{34}$ terhadap $y_{14}, y_{24}$	6,412	0,0261*	0,981	0,4213

Keterangan: \* hubungan non-linier ( $p < 0,05$ )





## Aplikasi Estimator *Spline* pada Data Penderita TB Paru (2)

Pemilihan orde  $m$  pada Data Penderita TB Paru

Kriteria	Orde $m$			
	2	3	4	5
$R^2$	0,760	0,8122	0,828	0,819
$RMSE$	0,0528	0,0441	0,0422	0,0492
$GCV$	0,296	0,290	0,263	0,285

Pemilihan Parameter Penghalus pada Data Penderita TB Paru

No	$GCV$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{14}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{23}$	$\lambda_{24}$
0	154451,50	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,374	0,354	0,354	0,354	0,354	0,354	0,354	0,354	0,353
2	0,344	0,311	0,355	0,391	0,424	0,379	0,348	0,271	0,349
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
26	0,263	0,004	0,254	0,558	1,033	0,510	0,188	0,061	0,221

$$\hat{\lambda}_{11} = 0,004, \hat{\lambda}_{12} = 0,254, \hat{\lambda}_{13} = 0,558, \hat{\lambda}_{14} = 1,033$$

$$\hat{\lambda}_{21} = 0,510, \hat{\lambda}_{22} = 0,188, \hat{\lambda}_{23} = 0,061, \hat{\lambda}_{24} = 0,221$$





## Aplikasi Estimator *Spline* pada Data Penderita TB Paru (3)

Hasil Validasi Silang pada Data Penderita TB Paru

No	Waktu Pengamatan	Aktual	Estimator <i>Spline</i> (Nonparametrik)				Estimator LMM (Parametrik)			
			<i>Leave Two Out</i>		<i>Leave One Out</i>		<i>Leave Two Out</i>		<i>Leave One Out</i>	
			Prediksi	Residual	Prediksi	Residual	Prediksi	Residual	Prediksi	Residual
$y_{11}$	12	0,425	0,471	-0,046			0,540	-0,115		
	13	0,613	0,796	-0,183	0,736	-0,123	0,903	-0,290	0,790	-0,177
$y_{12}$	12	0,955	0,947	0,008			1,021	-0,066		
	13	0,745	0,670	0,075	0,739	0,006	0,682	0,063	0,741	0,004
$y_{13}$	12	1,047	0,890	0,157			0,954	0,093		
	13	0,692	0,603	0,089	0,748	-0,056	0,696	-0,004	0,846	-0,154
$y_{14}$	12	0,796	0,814	-0,018			0,895	-0,099		
	13	0,892	0,882	0,010	0,897	-0,005	0,921	-0,029	0,934	-0,042
$y_{21}$	12	0,417	0,517	-0,100			0,703	-0,286		
	13	0,932	0,993	-0,061	0,969	-0,037	1,023	-0,091	0,992	-0,060
$y_{22}$	12	0,923	0,870	0,053			0,903	0,020		
	13	0,662	0,674	-0,012	0,644	0,018	0,677	-0,015	0,702	-0,040
$y_{23}$	12	1,087	0,966	0,121			1,048	0,039		
	13	0,331	0,345	-0,014	0,384	-0,053	0,425	-0,094	0,435	-0,104
$y_{24}$	12	0,667	0,706	-0,039			0,823	-0,156		
	13	1,209	1,201	0,008	1,205	0,004	1,243	-0,034	1,341	-0,132
RMSEP			0,088		0,062		0,134		0,123	





## Aplikasi Estimator *Spline* pada Data Penderita TB Paru (4)



(a)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *Minimal Lesson*



(b)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *Minimal Lesson*

Perbandingan Estimasi Regresi Parametrik LMM dan Regresi Nonparametrik *Spline* antara  $x_1$  terhadap  $y_1$  dan  $y_2$  pada subyek *Minimal Lesson*

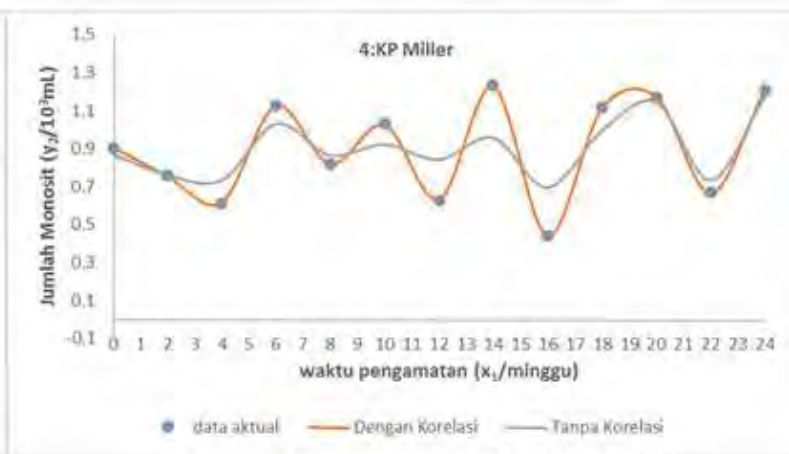




## Aplikasi Estimator *Spline* pada Data Penderita TB Paru (5)



(a)  $x_1$  dan  $y_1$  subyek *KP Miller*



(b)  $x_1$  dan  $y_2$  subyek *KP Miller*

Perbandingan Estimasi Regresi Nonparametrik *Spline* dengan Bobot mempertimbangkan korelasi dan tanpa korelasi antara  $x_1$  terhadap  $y_1$  dan  $y_2$  pada subyek *KP Miller*

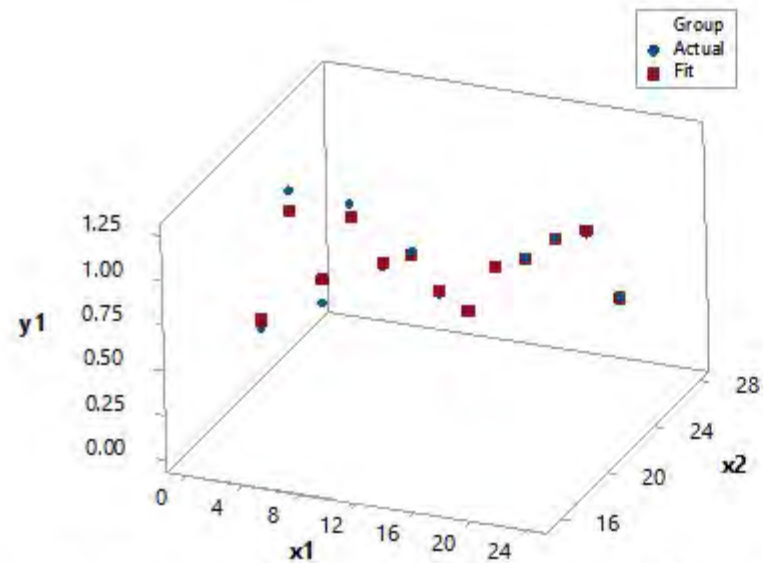
$$\Sigma_{k1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11,1} & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{12,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{11,2} & \dots & 0 & 0 & \Sigma_{12,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{11,N} & 0 & 0 & \dots & \Sigma_{12,N} \\ \Sigma_{12,1} & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{22,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{12,2} & \dots & 0 & 0 & \Sigma_{22,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{12,N} & 0 & 0 & \dots & \Sigma_{22,N} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{k2} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{11,2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{11,N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{22,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \Sigma_{22,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \Sigma_{22,N} \end{bmatrix}$$

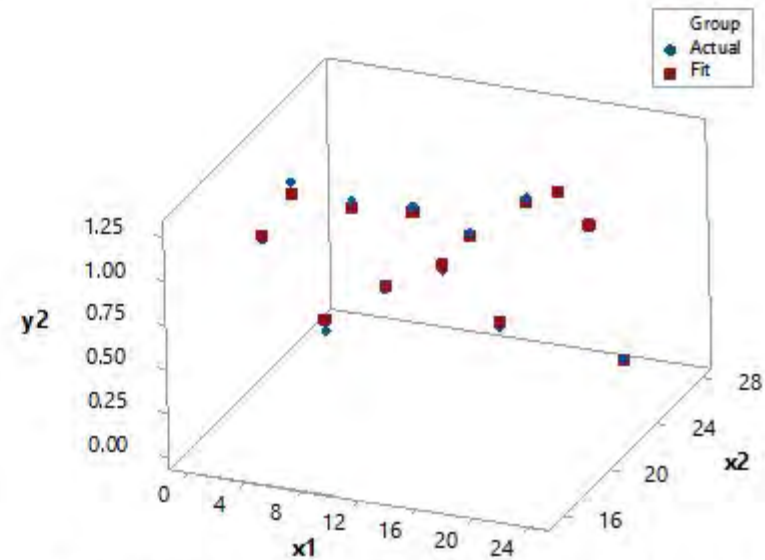




## Aplikasi Estimator *Spline* pada Data Penderita TB Paru (6)



(e)  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $y_1$  subyek *Far Advance*



(f)  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $y_2$  subyek *Far Advance*





## Aplikasi Estimator *Spline* pada Data Simulasi 1

Perbandingan Hasil Simulasi pada Berbagai Variasi Ordo Polinomial  $m$ , Ukuran Sampel  $T$ , dan Fungsi Percobaan

Nilai  $R^2$  berbagai variasi ukuran pengamatan & fungsi percobaan

$T$	$m$	Fungsi Percobaan					
		EE	TT	PP	ET	EP	TP
10	2	0,7742	0,6653	0,8892	0,3895	0,7769	0,6565
	3	0,9199	0,9063*	0,9150	0,6828	0,9274	0,7283
	4	0,9351*	0,8379	0,9327*	0,8010*	0,9280*	0,7747*
	5	0,9276	0,8373	0,9112	0,7157	0,9247	0,7045
20	2	0,7810	0,5470	0,8909	0,4244	0,8067	0,5190
	3	0,9108	0,7548	0,9294	0,6488	0,9075	0,5993
	4	0,9384	0,8241*	0,9119	0,6457	0,9077*	0,6100
	5	0,9395*	0,8240	0,9394*	0,6819*	0,9075	0,6136*
50	2	0,8298	0,3483	0,9383	0,5433	0,9399*	0,9217*
	3	0,9143	0,6156	0,9211	0,5163	0,9282	0,6952
	4	0,9214*	0,6998*	0,9313	0,5401	0,9161	0,8307
	5	0,9202	0,6988	0,9340*	0,5685*	0,9390	0,7850
100	2	0,8811	0,6544	0,9248	0,4870	0,8422	0,9223*
	3	0,9273	0,7545*	0,9353*	0,6716	0,9321	0,8570
	4	0,9195	0,7489	0,9280	0,6902	0,9214	0,8693
	5	0,9315*	0,7503	0,9291	0,7625*	0,9365*	0,8619

Keterangan: \* menyatakan nilai  $R^2$  tertinggi tiap variasi  $T$  dan Fungsi Percobaan





## Aplikasi Estimator *Spline* pada Data Simulasi 2

### Perbandingan Hasil Simulasi pada Penggunaan Matriks Mempertimbangkan Korelasi dan Tidak

Nilai  $R^2$  dan  $RMSE$  berbagai Tingkat Korelasi dan Matriks-Varians

Fungsi Percobaan	$ \rho $	$R^2$		$RMSE$	
		$\Sigma_{k1}$	$\Sigma_{k2}$	$\Sigma_{k1}$	$\Sigma_{k2}$
EE	0,1	0,6795	0,6425	0,5150	0,5554
	0,2	0,3104	0,2779	0,5530	0,4957
	0,3	0,5523	0,5952	0,5256	0,5489
	0,4	0,8934	0,5797	0,0894	0,4431
	0,5	0,9234	0,4622	0,0922	0,4883
	0,6	0,9213	0,5799	0,0922	0,5387
	0,7	0,9410	0,4728	0,0900	0,4779
	0,8	0,9450	0,4307	0,0917	0,4669
	0,9	0,9696	0,5405	0,0906	0,5290

Nilai  $R^2$  dan  $RMSE$  berbagai Dua Tingkat Korelasi

Fungsi Percobaan	$\rho$	$R^2$		$RMSE$	
		$\Sigma_{k1}$	$\Sigma_{k2}$	$\Sigma_{k1}$	$\Sigma_{k2}$
EE	Rendah	0,5294	0,5144	0,5552	0,5379
	Tinggi	0,9433	0,5192	0,0943	0,5015
TT	Rendah	0,5976	0,6015	0,5273	0,5476
	Tinggi	0,8914	0,4974	0,3122	0,5125
PP	Rendah	0,5468	0,5308	0,5488	0,5461
	Tinggi	0,9470	0,5024	0,0680	0,5168
ET	Rendah	0,5307	0,5156	0,5749	0,5868
	Tinggi	0,7105	0,3906	0,2975	0,4864
EP	Rendah	0,4275	0,4292	0,5570	0,5146
	Tinggi	0,9638	0,5345	0,2748	0,4793
TP	Rendah	0,5494	0,5318	0,5589	0,5416
	Tinggi	0,6932	0,4030	0,4793	0,5178

$$\Sigma_{k1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11,1} & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{12,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{11,2} & \dots & 0 & 0 & \Sigma_{12,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{11,N} & 0 & 0 & \dots & \Sigma_{12,N} \\ \Sigma_{12,1} & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{22,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{12,2} & \dots & 0 & 0 & \Sigma_{22,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{12,N} & 0 & 0 & \dots & \Sigma_{22,N} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{k2} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{11,2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{11,N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{22,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \Sigma_{22,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \Sigma_{22,N} \end{bmatrix}$$





## Kesimpulan (1)

- Model regresi nonparametrik birespon yang melibatkan  $p$  prediktor pada data *longitudinal* pada persamaan memiliki bentuk:

$$y_{kit} = \sum_{\ell=1}^p f_{ki}(x_{\ell it}) + \varepsilon_{kit},$$

$$\underset{\sim}{f} = \mathbf{T}^* \underset{\sim}{d}^* + \mathbf{V}^* \underset{\sim}{c}^*$$

- Estimasi kurva regresi menggunakan PWLS:

$$\underset{\sim}{\hat{d}}^* = \left( \mathbf{T}^* ' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^* ' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} y.$$

$$\underset{\sim}{\hat{c}}^* = \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^* ' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^* ' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1}] y.$$

$$\underset{\sim}{\hat{f}}_{\lambda} = \mathbf{A}_{\lambda} \underset{\sim}{y}$$

$$\mathbf{A}_{\lambda}^* = \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^* ' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^* ' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} + \mathbf{V}^* \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^* \left( \mathbf{T}^* ' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{T}^* \right)^{-1} \mathbf{T}^* ' \mathbf{M}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1}].$$





## Kesimpulan (2)

- Kajian terapan pada Data Riil pasien penderita TB Paru memiliki tingkat prediksi yang cukup baik (82,8%).
- Hasil estimasi regresi nonparametrik birespon *spline* memiliki tingkat determinasi yang lebih tinggi dibandingkan regresi parametrik LMM ( $R^2$  sebesar 82,8% dibandingkan 33,9%).
- Penggunaan bobot yang mempertimbangkan korelasi antar respon memiliki tingkat determinasi yang lebih tinggi ( $R^2$  sebesar 82,8% dibandingkan 50,1%).





### Kesimpulan (3)

- Kajian terapan pada data simulasi menunjukkan orde polinomial *spline*  $m=4$  dan  $m=5$  yang paling sering terpilih berdasarkan nilai  $R^2$  tertinggi dan  $RMSE$  terendah.
- Karakteristik fungsi percobaan polinomial memberikan hasil simulasi lebih baik dibandingkan fungsi percobaan eksponensial dan trigonometri.
- Karakteristik ukuran sampel  $T=50$  dan  $T=100$  (sampel besar) memberikan hasil simulasi lebih baik dibandingkan ukuran sampel  $T=10$  dan  $T=20$  (sampel kecil),
- Penggunaan matriks varians-kovarians *random error* mempertimbangkan korelasi antar respon tepat untuk digunakan pada kondisi tingkat korelasi di atas 0,3





# Saran dan Keberlanjutan

Penelitian selanjutnya perlu mengembangkan estimasi model regresi nonparametrik multirespon yang melibatkan lebih dari dua respon.

Penelitian berikutnya dapat melanjutkan pada kasus yang sama dengan mempertimbangkan heterogenitas varians *random error*.

Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan estimator *spline* untuk variabel prediktor bersifat non aditif.

Penelitian berikutnya dapat mengembangkan estimator *spline* yang mampu mengakomodir bentuk kurva regresi yang berbeda pada setiap variabel prediktor.





*Terima  
Kasih*